



Luciano Alberto do Carmo Jacinto
Licenciado em Engenharia Civil

AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE PONTES EXISTENTES

Abordagem Probabilística Bayesiana

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Engenharia Civil, Especialidade de Estruturas

Orientador: Doutor Luís Miguel Pina de Oliveira Santos
Inv. Principal, LNEC
Co-orientador: Doutor Luís Armando Canhoto Neves
Prof. Auxiliar, FCT–UNL

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Manuel Américo de Jesus Gonçalves da Silva
Arguentes: Prof. Doutor António Abel Ribeiro Henriques
Prof. Doutor Ângelo Palos Teixeira

Vogais: Eng. Armando António Marques Rito
Prof. Doutor António Lopes Baptista
Prof. Doutor Luís Miguel Pina de Oliveira Santos
Prof. Doutor Luís Armando Canhoto Neves



Dezembro, 2011

Dissertação desenvolvida no Laboratório Nacional de Engenharia Civil ao abrigo do protocolo existente entre o ISEL e o LNEC, e submetida à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de doutor em Engenharia Civil.

Avaliação da segurança de pontes existentes — Abordagem probabilística Bayesiana

Copyright © Luciano Alberto do Carmo Jacinto, FCT/UNL, UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

À Mariana e à Clara

Agradecimentos

Desejo em primeiro lugar agradecer ao eng.º Luís Oliveira Santos, que aceitou ser meu orientador científico. Para além da sua estimulante personalidade, agradeço todo apoio e encorajamento, e os comentários oportunos em momentos chave. Dirijo também um agradecimento especial ao eng.º Luís Neves, co-orientador deste trabalho. Não nos conhecíamos antes, mas, passados estes longos quatro anos, sinto que valeu bem a pena tê-lo conhecido. Nunca tivemos uma única reunião os três em que não se tivessem feito progressos ou tomado decisões importantes.

Agradeço ao ISEL todo o apoio recebido, que incluiu a dispensa de serviço docente durante o período de desenvolvimento deste trabalho. Agradeço também à Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo apoio financeiro através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/45022/2008. Agradeço ainda ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil, que aceitou acolher-me e que me facultou excelentes condições de trabalho, e em particular ao eng.º Almeida Fernandes pelo interesse que sempre demonstrou. Sinto-me grato pelos comentários e a sua visão muito lúcida e perspicaz dos assuntos.

A todos os colegas do NOE, o eng.º Paulo Silveira, a Teresa, a Xu Min, o João, a Sandra, agradeço-lhes a sua amizade e a companhia agradável nos cafés matinais. Do NOE ainda, não me esqueço também do carinho do Jorge e da Maíra, e claro, da dona Fernanda. Agradeço também aos experimentadores desse Núcleo, em especial ao Sr. Fidalgo que me acompanhou numa das inspeções à ponte estudada nesta dissertação.

Ao André Monteiro, desejo também manifestar profundo reconhecimento. A sua intervenção foi decisiva em algumas partes deste trabalho. Ficam na memória as nossas vivas discussões sobre o esclerómetro e do famoso «erro em X ». Aos restantes colegas do Núcleo de Betões, agradeço o companheirismo muito agradável que proporcionaram.

Gostaria também de agradecer ao eng.º Arlindo Gonçalves e ao eng.º Manuel Pipa por todo o apoio e interesse manifestados.

Não me esqueço também da Sofia Azeredo, que, para além da sua personalidade muito afável, introduziu-me no mundo Bayesiano via WinBugs. Ao eng.º João Casaca, que se intitula «frequentista convertido ao Bayesianismo», expresso também

o meu muito obrigado pelos comentários a algumas partes do texto, em particular o Capítulo 4.

Agradeço ainda ao eng.^o Mário Castanheta, a quem tive o privilégio de conhecer e que desde o princípio me inspirou profundo respeito.

Gostaria ainda de mencionar duas pessoas que exerceram uma influência determinante no meu percurso profissional: o eng.^o Câncio Martins, cujo profissionalismo e dedicação à profissão me marcaram profundamente nos anos em que fui seu colaborador, e o eng.^o Armando Rito, a quem me sinto privilegiado de ter assistido na cadeira de Pontes e Viadutos do ISEL, e que sempre me estimulou a realizar este trabalho. Muito obrigado a ambos pela amizade e pelos ensinamentos transmitidos.

Do ISEL, gostaria de mencionar alguns colegas que em momentos chave foram verdadeiros amigos: a Cristina Machado, o Paulo Martins, o Paulo Mendes e o Sérgio Oliveira. Há ainda um número significativo de pessoas a quem me sinto em dívida. Menciono o eng.^o Sousa Gorgulho, o eng.^o Trancoso Vaz, a eng.^a Maria Ana, o eng.^o Filipe Vasques, o Ângelo Teixeira, a Paula Lamego, a Idália, e ainda outros que certamente estou a ser injusto por não citar. A todos, muito obrigado.

Finalmente agradeço à Mariana e à Clara que certamente se viram privadas da companhia do pai em muitos momentos durante o desenvolvimento deste trabalho. Ficaria muito satisfeito que um dia se interessassem por estes assuntos. Mas o meu maior desejo é que permaneçam na fé que partilhamos em comum. A elas dedico este trabalho.

Resumo

Palavras chave: Segurança estrutural / Pontes existentes / Avaliação probabilística / Actualização Bayesiana / Incerteza estatística / Modelo preditivo

A avaliação da segurança de pontes existentes tornou-se uma actividade de reconhecida importância. A constatação da existência de um número significativo de pontes carecendo de trabalhos de reparação, aliada à ocorrência, ainda que esporádica, de acidentes graves, com consequências extremamente gravosas, desencadeou em anos recentes a realização de vastas campanhas de inspecção a essas estruturas. Por razões económicas e de segurança, é imperativo assegurar que as pontes, como elementos vitais das infra-estruturas de transporte terrestre, se mantenham numa condição aceitável e com elevados níveis de fiabilidade. Por outro lado, os fundos disponíveis para trabalhos de manutenção e reforço são em geral escassos, o que para os donos de obra constitui um enorme desafio.

Constata-se que a maioria dos países, incluindo Portugal, não dispõe de documentação específica que sirva de orientação ou que regule a avaliação da segurança de pontes existentes. Assim, quando o problema se coloca, recorre-se aos mesmos regulamentos usados no projecto de estruturas novas, prática que não se mostra satisfatória. Com efeito, tem havido várias experiências de pontes que foram classificadas como inseguras pela aplicação dos critérios tradicionais de segurança, mas que uma análise probabilística veio a demonstrar que possuíam níveis de fiabilidade aceitáveis. Isto mostra que uma avaliação estrutural feita recorrendo apenas aos regulamentos vocacionados para projecto de estruturas novas pode conduzir ao dispêndio desnecessário de fundos com trabalhos de reparação e reforço. Não admira pois que as metodologias probabilísticas tenham vindo a ganhar aceitação crescente, particularmente no domínio das avaliações estruturais.

Entre essas metodologias, as metodologias Bayesianas devem ser mencionadas. Com efeito, uma das características das avaliações estruturais consiste na recolha sistemática de informações da ponte em avaliação e o uso dessa informação a fim de avaliar de forma mais realista a segurança da ponte. Como se demonstra neste trabalho, as metodologias Bayesianas revelam-se úteis, por permitirem actualizar

modelos probabilísticos pela incorporação de informação mais recente, e isto sem ignorar informação anterior.

A informação recolhida da ponte em avaliação apresenta-se frequentemente na forma de amostras de dimensão limitada, colocando a questão de se avaliar até que ponto essa limitação afecta as estimativas de fiabilidade. O presente trabalho procura dar uma resposta satisfatória a esta questão. Em particular, demonstra-se que amostras de dimensão reduzida podem penalizar severamente as estimativas de fiabilidade.

Estudam-se também as potencialidades e limitações do uso de ensaios não destrutivos na caracterização probabilística da resistência do betão de estruturas existentes. Demonstra-se que esses ensaios, alguns deles caracterizados pela baixa precisão, poderão ainda assim ser usados com vantagem.

Um caso de estudo, que se apresenta na parte final da dissertação, ilustra a aplicação de algumas metodologias desenvolvidas ao longo do trabalho e evidencia as importantes diferenças entre avaliar a segurança de uma ponte existente e dimensionar uma nova.

Juntamente com as conclusões do presente trabalho, que se apresentam no último capítulo, fazem-se algumas recomendações que poderão revelar-se úteis na preparação de futuros documentos destinados à regulamentação deste importante domínio de actividade: a avaliação da segurança de pontes existentes.

Abstract

Keywords: Structural safety / Existing bridges / Probabilistic assessment / Bayesian updating / Statistical uncertainty / Predictive model

Structural assessment of existing structures has become an activity with increasing importance. The fact that a significant number of bridges need repair, together with the occurrence of serious accidents, has led in recent years to extensive inspection campaigns of existing bridges. It is imperative to assure that bridges, as vital elements of the transportation infrastructure, are kept in an acceptable condition and with high levels of reliability. On the other hand, funding for maintenance and strengthening are generally limited, which represents for the owners an enormous challenge.

Most countries, including Portugal, do not have specific documentation to support safety assessment of existing bridges. Therefore, when assessing an existing bridge, those countries use the same codes as in the design of new structures, which is not satisfactory. Indeed, several bridges were classified as unsafe by applying design codes, but whose reliability was high enough, as demonstrated by means of probabilistic evaluation. This fact shows that a structural assessment using design codes might lead to an unnecessary waste of funds with repair and strengthening. Hence, it is not surprising that probabilistic methods have been gaining increasing acceptance, particularly in the assessment domain.

Among those methodologies, Bayesian approach must be mentioned. In fact, in structural assessment, it is very common to collect information from the bridge being assessed and to use that information in order to improve the assessment. As demonstrated in this work, Bayesian methods are useful in structural assessment, for they allow the updating of probabilistic models by adding the latest information, without ignore the former.

Moreover, samples collected from the bridge being assessed are often of limited size, rising the question how that limitation affects reliability estimates. The present work aims giving a satisfactory answer to that question. In particular, it is demonstrated that samples with small size might severely penalize reliability estimates. So its effect must not be neglected.

The advantages and limitations of non destructive testing for assessing in-situ concrete strength are also studied. As demonstrated, those tests can successfully be used, although some of them have low accuracy.

A case study, presented in the end of the work, illustrates the application of some of the methodologies developed. The case study also illustrates the important differences between assessing an existing bridge and designing a new one.

Together with the conclusions of this work, which is presented in the last chapter, some recommendations are produced, which can be used in future documents to support this important activity domain: structural assessment of existing bridges.

Símbologia e abreviaturas

Apresenta-se de seguida uma lista dos principais símbolos e abreviaturas, incluindo siglas, usadas ao longo do texto.

Símbologia

Latinas

$E(X)$	Valor esperado (ou valor médio) da variável X
f_c	Resistência do betão à compressão
f_p	Resistência de aços de pré-esforço
$f_{p0.1}$	Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1% de aços de pré-esf.
f_{sy}	Tensão de cedência de armaduras ordinárias
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade de X
$F_X(x)$	Função de distribuição acumulada de X
$F_X^{-1}(x)$	Função de distribuição acumulada inversa de X
$L(\theta)$	Função de verosimilhança
p_f	Probabilidade de se atingir um estado limite (probabilidade de falha)
\hat{q}	Estimativa do verdadeiro valor da quantidade q
s	Desvio padrão amostral
s^2	Variância amostral
$V(X)$	Coefficiente de variação da variável X
$Var(X)$	Variância da variável X
\bar{x}	Média amostral
X_d	Valor de cálculo da variável X
X_k	Valor característico da variável X

Gregas

α_X	Coeficiente de sensibilidade FORM da variável X
β	Índice de fiabilidade
$\Phi(\cdot)$	Função cumulante da distribuição normal reduzida.
γ	Factor parcial de segurança; peso específico
μ_X	Valor esperado (ou valor médio) da variável X
θ	Parâmetros de modelos probabilísticos; variável descritiva da incerteza em modelos de transformação
σ_X^2	Variância da variável X
σ_X	Desvio padrão da variável X

Abreviaturas

AASHTO	<i>American Association of State Highway and transportation Officials</i>
CF	Carga de faca
EL	Estado limite
EUA	Estados Unidos da América
FDC	Função distribuição cumulativa (ou acumulada)
FDP	Função densidade de probabilidade
FORM	<i>First order reliability method</i>
HPD	<i>High Probability Density</i>
IID	Independente e identicamente distribuídos
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
JCSS	<i>Joint Committee on Structural Safety</i>
LNEC	Laboratório Nacional de Engenharia Civil
MC	Monte Carlo
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i>
NDT	<i>Non Destructive Test</i>
PMC	<i>Probabilistic Model Code</i>
PP	Peso próprio

RCP	Restante carga permanente
SCU	Sobrecarga uniforme
SORM	<i>Second order reliability method</i>
VT	Veículo tipo
WIM	<i>Weigh-in-Motion</i>

Índice do texto

1 Introdução

1.1	Enquadramento do tema	1
1.2	Objectivos	4
1.3	Organização do trabalho	5
1.4	Breve nota relativa à notação	6

2 Segurança estrutural

2.1	Considerações iniciais	7
2.2	Conceitos de estado limite, fiabilidade e segurança	9
2.2.1	Conceito de estado limite	9
2.2.2	Conceitos de fiabilidade e segurança.....	11
2.3	A verificação da segurança aos estados limites.....	12
2.3.1	O método dos estados limites	12
2.3.2	Abordagem semi-probabilística da segurança estrutural.....	12
2.3.3	Abordagem probabilística da segurança estrutural.....	13
2.4	Generalização do conceito de função estado limite. Modelos de transformação.....	15
2.5	Caracterização das incertezas nos problemas de fiabilidade estrutural.....	17
2.5.1	Fontes de incerteza.....	17
2.5.2	Incerteza aleatória <i>versus</i> incerteza epistémica	18
2.6	O problema fundamental da fiabilidade estrutural.....	20
2.7	Índice de fiabilidade	21
2.8	Fiabilidade estrutural e factor tempo	24
2.9	Níveis de fiabilidade alvo.....	27
2.10	Breve descrição dos métodos de fiabilidade.....	30
2.10.1	Métodos de nível I.....	30
2.10.2	Métodos de nível II.....	32
2.10.3	Métodos de nível III	36
2.10.4	Métodos de nível IV	41

2.11	Fiabilidade de sistemas	43
2.12	Considerações finais	45
3	Avaliação da segurança de pontes existentes	
3.1	Considerações iniciais	49
3.2	Dimensionamento <i>versus</i> avaliação	51
3.3	Prática em diferentes países.....	52
3.3.1	Avaliação da condição.....	52
3.3.2	Avaliação estrutural.....	54
3.4	Recomendações de organizações internacionais.....	59
3.5	Modelação de acções	65
3.5.1	Peso próprio dos elementos estruturais	66
3.5.2	Restante carga permanente.....	68
3.5.3	Sobrecargas rodoviárias.....	68
3.5.4	Influência da vida residual no valor característico das acções variáveis.....	79
3.6	Modelação da estrutura	81
3.7	Modelação de resistências	82
3.8	Ensaaios de carga	85
3.8.1	Ensaaios de diagnóstico	85
3.8.2	Provas de carga.....	87
3.8.3	Actualização da fiabilidade estrutural com base num ensaio de carga	88
3.9	Critérios de aceitação da fiabilidade para pontes existentes	88
3.10	Considerações finais.....	91
4	Abordagem Bayesiana — fundamentos	
4.1	Considerações iniciais	93
4.2	Interpretação Bayesiana do conceito de probabilidade	94
4.3	Conceitos fundamentais de probabilidade.....	98
4.4	Teorema de Bayes e distribuições de probabilidade.....	100
4.5	Actualização de modelos probabilísticos	103
4.5.1	Actualização de modelos probabilísticos quando a informação nova é do tipo amostral	103
4.5.2	Actualização de modelos probabilísticos por truncamento	108

4.5.3	Actualização de modelos probabilísticos a partir de observações de variáveis correlacionadas.....	110
4.6	Análise Bayesiana via método de Monte Carlo	112
4.7	Decisão Bayesiana	114
4.8	Considerações finais	117
5	Impacto da incerteza estatística em fiabilidade estrutural	
5.1	Considerações iniciais	119
5.2	Modelo Bayesiano de uma população Normal	121
5.2.1	Caso em que a informação anterior não é relevante	121
5.2.2	Caso em que a informação anterior é relevante	122
5.2.3	Exemplo	124
5.3	Impacto da incerteza estatística nos valores característicos	127
5.4	Impacto da incerteza estatística nos coeficientes de segurança.....	130
5.5	Impacto da incerteza estatística no índice de fiabilidade.....	133
5.6	Considerações finais	138
6	Actualização Bayesiana — variáveis de resistência	
6.1	Considerações iniciais	141
6.2	Combinação de informação amostral com informação obtida de bibliografia	142
6.3	Exemplos.....	144
6.3.1	Exemplo 1	144
6.3.2	Análise da credibilidade do modelo proposto pelo <i>Probabilistic Model Code</i>	149
6.3.3	Exemplo 2	153
6.4	Considerações finais	155
7	Predição da resistência do betão em estruturas existentes	
7.1	Considerações iniciais	159
7.2	A necessidade de calibração prévia dos ensaios indirectos.....	160
7.3	Calibração de ensaios indirectos	162
7.4	Obtenção do modelo preditivo da resistência do betão usando um ensaio indirecto	164
7.5	Exemplo	167

7.6	Determinação do número de carotes que torna um ensaio indirecto pouco atractivo.....	171
7.6.1	Incerteza na avaliação da resistência usando unicamente carotes	172
7.6.2	Incerteza na avaliação da resistência usando carotes e ensaio indirecto.....	173
7.7	Proposta de metodologia para avaliação da resistência do betão de estruturas existentes	177
7.8	Considerações finais	178

8 Caso de estudo

8.1	Considerações iniciais	181
8.2	Breve descrição da ponte	182
8.3	Verificação preliminar da segurança	186
8.3.1	Materiais.....	186
8.3.2	Acções.....	187
8.3.3	Esforços.....	189
8.3.4	Verificação da segurança.....	191
8.3.5	O problema da diminuição de aderência provocada pela delaminação do betão.....	194
8.3.6	Síntese dos resultados da verificação preliminar da segurança	196
8.4	Análise plástica.....	196
8.4.1	Mecanismo de colapso	197
8.4.2	Verificação da capacidade de rotação da secção de vão	198
8.4.3	Síntese dos resultados da análise plástica.....	200
8.5	Análise probabilística.....	201
8.5.1	Variáveis básicas e modelos de transformação	202
8.5.2	Avaliação da probabilidade de falha	214
8.6	Actualização Bayesiana do índice de corrosão	217
8.6.1	Recolha de informação relativa às áreas residuais das armaduras....	217
8.6.2	Modelo preditivo actualizado do índice de corrosão	221
8.6.3	Actualização da fiabilidade	222
8.6.4	Considerações adicionais a respeito do modelo Bayesiano.....	223
8.7	Análise plástica probabilística	225
8.8	Considerações finais	226

9 Conclusões e desenvolvimentos futuros

9.1	Conclusões.....	229
9.2	Recomendações para uma metodologia de avaliação da segurança de pontes existentes	234
9.3	Sugestões para desenvolvimentos futuros	236
Bibliografia.....		239
Anexo A Modelos probabilísticos		251
Anexo B Métodos de extrapolação		255
Anexo C Listagens de rotinas.....		261

Índice de figuras

Figura 2.1:	Definição de valores característicos para acções e resistências.....	13
Figura 2.2:	Modelos de transformação.....	16
Figura 2.3:	Representação gráfica do problema básico de duas variáveis.	21
Figura 2.4:	Índice de fiabilidade para o caso em que a margem de segurança segue uma lei Normal.	22
Figura 2.5:	Interpretação geométrica do índice de fiabilidade quando as variáveis básicas são normais e independentes e a função g é linear. ..	23
Figura 2.6:	Realização particular dos processos $E(t)$ e $R(t)$	25
Figura 2.7:	Realização particular dos processos $E(t)$, $R(\Delta t)$ e $E_{\max}(\Delta t)$ numa sucessão de intervalos de tempo.	26
Figura 2.8:	Probabilidade de falha durante n intervalos de tempo, em função de n	26
Figura 2.9:	Erro cometido pelo método FORM.	32
Figura 2.10:	Essência do método FORM.....	33
Figura 2.11:	Ilustração do método de MC básico (Teixeira, 2007).	39
Figura 2.12:	Ilustração do método de MC com amostragem de importância (Teixeira, 2007).....	39
Figura 2.13:	Formatos de verificação da segurança.	46
Figura 3.1:	Abordagem de três fases recomendado pelo JCSS (2001b).....	61
Figura 3.2:	Procedimento recomendado no projecto SUSTAINABLE BRIDGES (Casas <i>et al.</i> , 2008).....	64
Figura 3.3:	Gráfico força-deslocamento para medição da reacção em aparelhos de apoio. F é a força exercida pelo macaco e d é o deslocamento medido pelo deflectómetro (Santos, 2002).	67
Figura 3.4:	Factor de excesso de peso usado na Norma BD 21/01 (2001).	73
Figura 3.5:	Histograma do peso bruto de semi-reboques de 5 eixos e ajuste com distribuição Normal bi-modal (O'Connor & O'Brien, 2005).....	75

Figura 3.6:	Gráfico de dispersão de pontos (Q, DAF) gerado em harmonia com o modelo proposto em Vejdirektoratet (2004).....	78
Figura 4.1:	Intervalos de credibilidade: HPD (a) e centrado (b).....	107
Figura 4.2:	Truncamento à esquerda de uma distribuição de probabilidade.	109
Figura 4.3:	Ilustração do modelo de regressão.	111
Figura 4.4:	Ilustração de uma árvore de decisão.	115
Figura 4.5:	Árvore de decisão relativo a um ensaio de carga.	116
Figura 4.6:	Processo de actualização Bayesiana como processo contínuo.....	118
Figura 5.1:	Densidades <i>a posteriori</i> da média e variância da população $f_{p0.1}$ (tensão limite convencional de proporcionalidade).....	125
Figura 5.2:	Gráfico de dispersão de pontos (μ, σ^2) gerados artificialmente a partir da distribuição <i>a posteriori</i>	126
Figura 5.3:	Densidade de probabilidade de $X = f_{p0.1}$: modelo preditivo Bayesiano e modelo que ignora a incerteza estatística.	126
Figura 5.4:	Razão $\rho = \hat{X}_k / \hat{X}_{k0}$ em função da dimensão da amostra n	128
Figura 5.5:	Distribuição <i>a posteriori</i> do valor característico X_k da tensão limite convencional de proporcionalidade.	129
Figura 5.6:	Ilustração de como se pode obter uma amostra com boa representatividade de uma população.	130
Figura 5.7:	Efeito da dimensão da amostra nos coeficientes parciais de segurança de variáveis de resistência dominantes.	132
Figura 5.8:	Densidade de probabilidade <i>a posteriori</i> do factor de segurança, γ_m . Esta distribuição descreve a incerteza em γ_m , depois da observação da amostra ε	132
Figura 5.9:	Secção de meio vão do tabuleiro da ponte em estudo.	134
Figura 5.10:	Histogramas <i>a posteriori</i> da probabilidade de falha e do índice de fiabilidade.	137
Figura 6.1:	Modelo probabilístico recomendado pelo <i>Probabilistic Model Code</i> (PMC) e modelo preditivo <i>a priori</i> obtido dessa recomendação.	145
Figura 6.2:	Efeito causado pela combinação de informação anterior e informação amostral com médias significativamente diferentes.	146
Figura 6.3:	Modelos preditivos considerando informação anterior equivalente a uma amostra com dimensão $n_0 = 50$	148

Figura 6.4:	Modelos preditivos considerando informação anterior equivalente a uma amostra com dimensão $n_0 = 3$	148
Figura 6.5:	Histograma da tensão $f_{p0.1}$ de 131 de ensaios de tracção realizados no LNEC entre 2001 e 2009.....	150
Figura 6.6:	Modelo Normal ajustado à amostra LNEC e modelo preditivo <i>a priori</i> LNEC.....	150
Figura 6.7:	Comparação do modelo recomendado pelo PMC com o modelo <i>a priori</i> LNEC.....	151
Figura 6.8:	Modelos preditivos: <i>a priori</i> (amostra LNEC), <i>a posteriori</i> , apenas informação amostral) e <i>a posteriori</i> (informação amostral + informação <i>a priori</i>).	152
Figura 6.9:	Distribuição de probabilidade da diferença entre médias das amostras LNEC e colhida dos registos de obra.	153
Figura 6.10:	Modelos preditivos relativos à tensão limite convencional de proporcionalidade do exemplo 2.	155
Figura 6.11:	Proposta para uso de metodologia Bayesiana em avaliações de segurança de pontes existentes.	157
Figura 7.1:	Extracção de carotes.	160
Figura 7.2:	Utilização do esclerómetro.....	160
Figura 7.3:	Representação gráfica do modelo de regressão linear simples.....	163
Figura 7.4:	Representação gráfica do modelo de regressão linear.	168
Figura 7.5:	Histograma e distribuição empírica da resistência do betão.	170
Figura 7.6:	Factor de incerteza do ensaio directo para um betão com $V = 0.12$	173
Figura 7.7:	Factores de incerteza do ensaio directo e ensaio indirecto referentes a um betão com $V = 0.12$ e ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 2.0$ MPa	175
Figura 7.8:	Factores de incerteza do ensaio directo e ensaio indirecto referentes a um betão com $V = 0.18$ e ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 2.0$ MPa	176
Figura 7.9:	Factores de incerteza do ensaio directo e ensaio indirecto referentes a um betão com $V = 0.12$ e ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 3.0$ MPa	177
Figura 8.1:	Vista de Sul para Norte da ponte objecto de estudo.	182

Figura 8.2:	Algumas das características geométricas mais importantes do tabuleiro (dimensões em metros).	183
Figura 8.3:	Tramo Sul (Verão de 2010) — vistas de Sul para Norte.	184
Figura 8.4:	Tramo central (verão de 2010) — vista de Sul para Norte.....	184
Figura 8.5:	Tramo Norte (verão de 2010) — vistas de Norte para Sul.	185
Figura 8.6:	Configuração de um camião comercial de 4 eixos usado num ensaio de carga recente.	189
Figura 8.7:	Modos de ruína idealizados para o tabuleiro.....	189
Figura 8.8:	Características da secção de meio vão do tramo lateral Sul (viga 1). ..	192
Figura 8.9:	Características da secção de apoio (viga 1).....	192
Figura 8.10:	Características da secção de meio vão do tramo central (viga 1).....	193
Figura 8.11:	Mecanismo de colapso do tramo central da ponte.	197
Figura 8.12:	Diagrama momentos–curvatura da secção de apoio.....	199
Figura 8.13:	Diagrama momentos–curvatura da secção de apoio.....	199
Figura 8.14:	Momentos elásticos <i>versus</i> momentos reais na secção de meio vão....	202
Figura 8.15:	Configuração do veículo tipo.	203
Figura 8.16:	Modelos Normal e Lognormal da resistência do betão com média e desvio padrão iguais aos da amostra disponível.....	206
Figura 8.17:	Comparação dos modelos para a resistência do betão com e sem incerteza estatística incluída.	207
Figura 8.18:	Armaduras da secção de meio vão do tramo central (viga 1).	210
Figura 8.19:	Algumas das formas que é possível obter para a FDP do índice de corrosão $X = i_c$ com α e β a variar no intervalo $[1, 8]$	211
Figura 8.20:	Histograma preditivo do índice de corrosão $X = i_c$ considerando que α e β são independentes e uniformemente distribuídos no intervalo $[1, 8]$	211
Figura 8.21:	Histogramas dos momentos actuante e resistente, obtidos com o método de MC (um milhão de simulações).....	215
Figura 8.22:	Quadrado dos coeficientes de sensibilidade FORM.....	216
Figura 8.23:	Estado da secção de interesse — meio vão do tramo central da viga 1.....	218
Figura 8.24:	Janela para inspecção do estado das armaduras.	218
Figura 8.25:	Medição do diâmetro de uma armadura longitudinal exposta.	219

Figura 8.26: Medição do diâmetro de uma armadura de canto (valor lido = 17 mm).	220
Figura 8.27: Medição do diâmetro num canto com betão destacado.	220
Figura 8.28: Histograma preditivo do índice de corrosão. Os parâmetros μ e V indicados são a média e o coeficiente de variação da amostra gerada.....	222
Figura 8.29: Histogramas dos momentos actuante e resistente, obtidos com o método de MC (um milhão de simulações).	223
Figura 8.30: Evolução do histograma preditivo do índice de corrosão à medida que as observações foram estando disponíveis.	224

Índice de tabelas

Tabela 2.1:	Valores de β_T (índice de fiabilidade-objectivo) recomendados pela NP EN 1990 (2009).	28
Tabela 2.2:	Valores de β_T (índice de fiabilidade-objectivo) recomendados pela ISO 2394 (1998) — vida útil da estrutura.	29
Tabela 2.3:	Valores de β_T (índice de fiabilidade-objectivo) recomendados pelo PMC (JCSS, 2001a) — Períodos de referência 1 ano e 50 anos.	29
Tabela 2.4:	Comparação de valores β_T recomendados por diferentes fontes. Estados limites últimos e período de referência igual à vida da estrutura.	30
Tabela 3.1:	Índices de fiabilidade-alvo para pontes existentes especificados no regulamento canadiano. Período de referência 1 ano.	56
Tabela 3.2:	Índices de fiabilidade-alvo especificados na Dinamarca para estados limites últimos. Período de referência 1 ano.	58
Tabela 3.3:	Esquema geral dos níveis de verificação da segurança propostos no projecto BRIME (2001).	62
Tabela 3.4:	Peso específico de alguns materiais, de acordo com o PMC.	68
Tabela 3.5:	Pesos brutos máximos para veículos de transporte de mercadorias (D.L. n.º 99/2005).	72
Tabela 3.6:	Modelos probabilísticos para a variável θ — incerteza nos modelos estruturais (JCSS, 2001a).	82
Tabela 3.7:	Modelos probabilísticos para a variável θ — incerteza nos modelos resistência (JCSS, 2001a).	84
Tabela 3.8:	Índice de fiabilidade objectivo, β_T , para estados limites últimos e período de referência 1 ano (Casas <i>et al.</i> , 2008).	89
Tabela 5.1:	Variáveis básicas do exemplo em estudo.	134
Tabela 6.1:	Resumos estatísticos das informações amostral e anterior.	146
Tabela 6.2:	Amostra de resistências ($f_{p0.1}$) de cordões de pré-esforço [MPa].	149

Tabela 6.3:	Comparação das estimativas para X_k e X_d usando apenas informação amostral e usando informação amostral + anterior.....	154
Tabela 7.1:	Pares (x_i, y_i) para a calibração do esclerómetro.	168
Tabela 7.2:	Índice esclerométrico x_i , $i = 1, \dots, 84$	169
Tabela 7.3:	Comparação das inferências realizadas via esclerómetro calibrado com as inferências realizadas via carotes	171
Tabela 8.1:	Resultados de ensaios de carotes extraídas da ponte em estudo.	186
Tabela 8.2:	Momentos flectores actuantes nas vigas [kNm].....	190
Tabela 8.3:	Esforços transversos actuantes nas vigas [kN]	190
Tabela 8.4:	Distribuições de probabilidade das variáveis básicas.	214
Tabela 8.5:	Coefficientes de sensibilidade FORM.....	216

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento do tema

À medida que a construção de estruturas novas diminui e o parque de estruturas existentes estabiliza, as necessidades passam cada vez mais a centrar-se na sua manutenção, procurando que estas se mantenham numa condição mínima aceitável. É bem sabido que deixar as estruturas atingir níveis avançados de degradação e só intervir depois, constitui uma prática antieconómica. Estudos recentes (Neves, 2005) têm demonstrado que estratégias óptimas de gestão de obras de arte estão associadas à aplicação frequente de acções de manutenção, do tipo preventivo.

A par da sua condição, é necessário manter a segurança das pontes em níveis aceitáveis. As pontes são elementos vitais da rede de transportes terrestres e um eventual colapso estrutural pode representar sérias consequências económicas e sociais. Colapsos estruturais ocorridos um pouco por todo o mundo assim o demonstram (Akesson, 2008). Veja-se, por exemplo, o colapso da ponte Hintze Ribeiro, ocorrido em 2001, ou o caso da queda da ponte sobre o Mississipi em Minneapolis, ocorrida em 2007. A inspecção das obras de arte e a avaliação da segurança ao longo da sua vida é por isso de extrema importância.

A manutenção e segurança de pontes existentes é pois um tema actual e relevante, como evidencia o financiamento por parte da Comissão Europeia de um número significativo de projectos de investigação que abordam facetas diversas deste tema. Entre esses projectos, podem citar-se o projecto BRIME (2001), a acção COST 345 (2001a e 2001b), o projecto SAMARIS (2006a e 2006b) e, mais recentemente, o projecto SUSTAINABLE BRIDGES (2007a, 2007b, 2007c e 2007d), dedicado especificamente às pontes ferroviárias. Refere-se também a criação em 1999 da

IABMAS – *International Association for Bridge Maintenance and Safety* (www.iabmas.org), com o objectivo de promover a cooperação internacional no campo da manutenção e segurança de pontes, e, em 2005, do seu grupo nacional, a ASCP — *Associação Portuguesa para a Segurança e Conservação de Pontes* (www.ascp.pt).

A intenção relativa à criação de uma nova família de eurocódigos dedicados à segurança de estruturas existentes constitui uma evidência adicional da actualidade do tema.

A segurança estrutural tem suscitado o interesse de muitos investigadores, merecendo uma referência a actividade pioneira dos investigadores portugueses Júlio Ferry Borges e Mário Castanheta (Borges, 1954), cujos trabalhos estiveram, de resto, na base da moderna regulamentação de estruturas. O trabalho de investigação produzido por esses e outros investigadores mostrou que a abordagem probabilística da segurança estrutural é a mais apropriada (Borges & Castanheta, 1985). De facto, a presença de diferentes fontes de incerteza confere ao problema da segurança estrutural uma natureza essencialmente probabilística (Henriques, 1998; Wisniewski, 2007).

Graças ao trabalho levado a cabo por inúmeros investigadores, a abordagem probabilística da segurança estrutural, conhecida por *teoria da fiabilidade estrutural*, está hoje perfeitamente consolidada e bem documentada. Essa teoria, porém, é ainda hoje pouco utilizada no dimensionamento e verificação da segurança de estruturas. A metodologia alternativa de uso geral baseia-se, como é sabido, no *método dos coeficientes parciais de segurança*. De acordo com esta metodologia, a fiabilidade das estruturas é assegurada por se aplicarem aos valores característicos das variáveis intervenientes factores de segurança apropriados, função dos níveis de incerteza de cada variável. Procura-se que as resistências se mantenham suficientemente afastadas das acções de forma a garantir que a probabilidade de rotura seja suficientemente baixa. Esta probabilidade, porém, não é directamente explicitada no problema, pelo que esta metodologia não permite quantificar o risco de ocorrência de danos graves.

Devido à sua simplicidade e também graças a um registo histórico bem sucedido no projecto de estruturas, o método dos coeficientes parciais de segurança continuará sem dúvida na base da verificação da segurança de estruturas novas. Aliás, este continua a ser o método base de verificação preconizado nos eurocódigos (NP EN 1990, 2009). No entanto, em estruturas existentes, a tendência actual é o recurso à teoria da fiabilidade estrutural, por permitir de uma forma mais racional e consistente quantificar as diferentes fontes de incerteza, que são específicas de cada problema. De facto, as incertezas relativas a uma ponte específica existente poderão ser de uma natureza e magnitude bastante distinta das previstas na regulamentação, que trata de

populações relativamente vastas de estruturas, pelo que os coeficientes de segurança usados no projecto de estruturas novas poderão não traduzir de forma correcta as incertezas específicas de uma ponte particular em avaliação (Val & Stewart, 2002; Cruz *et al.*, 2008). Quando a ponte é construída, algumas fontes de incerteza podem reduzir-se, como é o caso das incertezas associadas aos materiais ou à qualidade de construção.

Não admira pois que alguns países, podendo aqui citar-se a Dinamarca, os Estados Unidos e o Canadá, tenham vindo a encorajar o recurso a metodologias probabilísticas em avaliações de segurança de pontes existentes, disponibilizando inclusivamente documentação de apoio, na forma de documentos-guia ou mesmo normas. Uma das razões para esse encorajamento tem a ver com as poupanças financeiras significativas conseguidas pelo uso dessas metodologias. Na Dinamarca, por exemplo, relatam-se vários casos em que uma metodologia probabilística permitiu classificar como seguras estruturas que não tinham cumprido os critérios tradicionais de segurança, evitando-se assim gastos desnecessários com trabalhos de reforço, ou mesmo substituição, além de se terem poupado os utilizadores dos transtornos que normalmente acompanham esses trabalhos (Enevoldsen, 2009; Lauridsen, 2006). Estes autores sublinham que em nenhum desses casos foi posta em causa a fiabilidade pretendida para essas estruturas (sensivelmente idêntica à fiabilidade para estruturas novas), mas que essa fiabilidade foi estimada de forma mais realista.

Deve referir-se ainda que tem havido progresso notável ao nível dos modelos estruturais usados na verificação da segurança das estruturas. De facto, graças à disponibilidade de programas informáticos de análise estrutural avançados, é hoje possível modelar o comportamento das estruturas de forma bastante rigorosa, tendo-se tornado prática muito usual o recurso a modelos estruturais relativamente complexos. No entanto, este progresso não tem tido correspondência ao nível dos critérios de segurança, dando origem a um problema de coerência. Com efeito, quando os esforços (ou outros efeitos) obtidos desses modelos são majorados por um coeficiente de segurança (1.5, por exemplo), cuja justificação está ligada essencialmente a práticas bem sucedidas anteriores, todo o rigor é perdido. Por razões de coerência, dever-se-ia utilizar o mesmo grau de rigor em todo o processo de verificação da segurança, desde a quantificação de acções, passando pela análise estrutural e quantificação de esforços resistentes, e finalmente a verificação da segurança propriamente dita. Parece então apropriado que os esforços de investigação sejam direccionados no sentido de contribuírem para um uso mais generalizado de metodologias probabilísticas na verificação da segurança das estruturas.

Entre as metodologias probabilísticas, as metodologias Bayesianas têm sido frequentemente referidas como tendo potencialidades no domínio da avaliação da segurança de pontes existentes. Na verdade, uma das características peculiares deste domínio de actividade consiste na recolha sistemática de informação da ponte em avaliação (realização de ensaios ou consulta de registos de obra, por exemplo) e o uso dessa informação a fim de melhor estimar a fiabilidade da ponte. Um dos pontos fortes da abordagem Bayesiana é justamente a sua capacidade em modificar (ou actualizar) modelos probabilísticos pela incorporação de informação nova ou mais recente, e isto sem ignorar qualquer informação anterior relevante.

As técnicas de incorporação de nova informação em modelos probabilísticos, ou técnicas de actualização Bayesiana (*Bayesian updating*), baseiam-se no conceito de probabilidade condicionada e no teorema de Bayes (Ang & Tang, 2007; Box & Tiao, 1992). No entanto, o tratamento analítico desta questão é possível apenas em casos particulares, pelo que o tratamento numérico afigura-se como alternativa muito válida. Torna-se pois necessário desenvolver algoritmos que permitam aplicar as técnicas de actualização Bayesiana em situações genéricas.

1.2 Objectivos

O principal objectivo deste trabalho consiste na exploração das potencialidades da abordagem Bayesiana no âmbito específico da segurança de pontes existentes e em que medida essa abordagem pode contribuir para uma melhoria das avaliações estruturais.

Estabeleceu-se também como objectivo desenvolver um modelo que, recorrendo a técnicas de simulação numérica, permita a actualização de distribuições de probabilidade de qualquer tipo, sempre que novas informações se tornem disponíveis.

Considerando que uma das tarefas típicas no âmbito das avaliações estruturais consiste na recolha de amostras da ponte em avaliação e que essas amostras são muitas vezes de pequena dimensão, pretende-se investigar, recorrendo à abordagem Bayesiana, a importância da incerteza originada pelo uso dessas amostras de reduzida dimensão (incerteza estatística). Pretende-se ainda analisar métodos que permitam reduzir o impacto da incerteza estatística nos casos em que esta se revela significativa.

No domínio da segurança de pontes existentes, é inegável o interesse dos chamados ensaios não destrutivos, conhecidos geralmente pela sigla NDT (*Non destructive tests*). Recorrendo a modelos preditivos Bayesianos, investiga-se as

potencialidades e limitações do uso de ensaios indirectos na caracterização probabilística da resistência do betão de estruturas existentes.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho está organizado em 9 capítulos, iniciando-se com a presente introdução que constitui o Capítulo 1.

O capítulo 2 trata dos conceitos fundamentais de fiabilidade e segurança estrutural, conceitos a empregar extensivamente nos capítulos seguintes. Como referido anteriormente, trata-se de um ramo do conhecimento bem consolidado. A forma clara e lógica com que estes assuntos são apresentados na Norma ISO 2394 (1998) serviu de inspiração na redacção de uma boa parte deste capítulo.

O Capítulo 3 analisa as questões de segurança quando aplicadas ao problema específico da segurança de pontes existentes. Estabelece-se o estado da arte e descreve-se também o estado da prática em diferentes países com maior desenvolvimento neste domínio.

No capítulo 4 apresentam-se os fundamentos do paradigma Bayesiano. Os assuntos são organizados de forma a realçar a vertente *updating* desse paradigma. Neste capítulo desenvolve-se um modelo que, recorrendo a técnicas de simulação numérica (método de Monte Carlo), permite a actualização de modelos probabilísticos quaisquer quando a informação nova é do tipo amostral.

O capítulo 5 investiga o impacto da incerteza estatística em quantidades de interesse no domínio da fiabilidade estrutural, incluindo valores característicos, coeficientes parciais de segurança e índices de fiabilidade.

O capítulo 6, recorrendo ao paradigma Bayesiano, analisa o modo em como essas incertezas poderão ser reduzidas pelo recurso a fontes de informação externas à ponte que estiver a ser avaliada (recomendações de bibliografia especializada e outras).

O capítulo 7 trata da caracterização probabilística da resistência do betão em estruturas existentes quando se usam ensaios indirectos em complemento dos ensaios directos de carotes extraídas da estrutura em avaliação. Adoptam-se modelos preditivos Bayesianos, pelo que este capítulo constitui uma aplicação desse paradigma. Como se verá, esses ensaios, alguns deles caracterizados pela baixa precisão, poderão ser usados com vantagem.

O capítulo 8 diz respeito a um caso de estudo, onde se avalia a segurança de uma ponte em avançado estado de degradação. Para além de constituir uma oportunidade para a aplicação das ferramentas e dos conceitos desenvolvidos nos capítulos

precedentes, o caso de estudo permitirá evidenciar as diferenças fundamentais entre dimensionar uma estrutura nova e avaliar a segurança de uma existente.

Finalmente, no capítulo 9, apresentam-se as principais conclusões e algumas sugestões para desenvolvimentos futuros.

1.4 Breve nota relativa à notação

Embora se tenha procurado utilizar a simbologia mais comum no domínio das probabilidades e estatística e em especial a usada nos eurocódigos, julga-se oportuno referir aqui alguns aspectos de notação. Assim, a probabilidade do evento A será denotada por $P(A)$. A função densidade de probabilidade (FDP) da variável X será denotada por $f_X(x)$, e a função distribuição acumulada, ou função distribuição cumulativa (FDC), por $F_X(x)$, isto é, $F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx$. Quando se desejar destacar que o modelo $f_X(x)$ depende de parâmetros, por exemplo, θ_1 e θ_2 , escreve-se $f_X(x | \theta_1, \theta_2)$ ou $F_X(x | \theta_1, \theta_2)$. A barra vertical $|$ separa assim a variável independente dos parâmetros do modelo, quantidades consideradas fixas.

Para indicar que a variável X segue um determinado modelo probabilístico escreve-se $X \sim \text{NomeModelo}(\theta_1, \theta_2)$, onde, entre parêntesis, figuram os parâmetros do modelo. No Anexo A apresenta-se uma lista dos modelos probabilísticos usados no presente estudo, indicando-se o nome adoptado para cada modelo e a respectiva parametrização. Por exemplo, a distribuição gama será denotada por Ga , escrevendo-se $X \sim Ga(\alpha, \beta)$. Esta expressão é equivalente a escrever $f_X(x | \alpha, \beta) = Ga(x | \alpha, \beta)$, isto é, o símbolo Ga é usado também para denotar o nome da FDP. Assim, de acordo com a parametrização adoptada no presente trabalho, tem-se $Ga(x | \alpha, \beta) = c \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$, onde c é uma constante (constante de normalização). Idêntico critério será adoptado para outros modelos probabilísticos.

O valor esperado da variável X será denotado por $E(X)$ ou por μ_X e a variância por $Var(X)$ ou por σ_X^2 . O desvio padrão será denotado por $D(X)$ ou por σ_X . O coeficiente de variação será denotada por V_X , como nos eurocódigos. Assim, $V_X = \sigma_X / \mu_X$.

Capítulo 2

Segurança estrutural

2.1 Considerações iniciais

De acordo com as normas ISO 2394 (1998) e NP EN 1990 (2009), esta última também conhecida por Eurocódigo 0, as estruturas devem ser projectadas, construídas e mantidas de tal modo que, de forma económica e com apropriados níveis de fiabilidade, apresentem bom desempenho em relação às funções para que foram construídas durante todo o período de vida útil pretendido. A garantia da fiabilidade e da economia é assegurada com medidas específicas implementadas nas três fases da vida da estrutura: fase de concepção (ou projecto), fase de construção e fase de serviço.

Uma estrutura apresenta bom desempenho durante o período de vida útil para que foi construída quando cumpre certos requisitos gerais, ditos requisitos fundamentais e que, de forma sumária, podem ser descritos como (NP EN 1990, 2009):

- 1) Requisito de serviço (ou utilização): as estruturas devem apresentar comportamento adequado à sua utilização quando sujeitas às acções espectáveis (acções com probabilidade relativamente elevada de ocorrência) durante a sua vida útil.
- 2) Requisito de segurança: as estruturas devem ser capazes de resistir a acções extremas e a combinações de acções bastante desfavoráveis de baixa probabilidade de ocorrência, mas ainda assim verosímeis. Quando sujeitas a tais acções excepcionais, podem sofrer danos graves, mas, na medida do possível, controlados e com o menor risco possível para a vida das pessoas.

- 3) Requisito de durabilidade: As estruturas devem manter-se numa boa condição, isto é, sem deterioração significativa, durante todo o período de vida útil fixado, sem que para tal sejam necessários custos de manutenção não previstos.
- 4) Requisito da robustez: As estruturas, quando sujeitas a acções de natureza accidental, erros humanos graves ou deterioração acentuada e não visível, não devem sofrer danos desproporcionais à causa que lhes dá origem.

O requisito da robustez está relacionado com a capacidade das estruturas mobilizarem percursos de carga alternativos sempre que um dos seus elementos sofre danos graves, evitando-se o colapso progressivo. É claro que não é fácil estabelecer critérios quantitativos precisos que permitam verificar se uma estrutura é suficientemente robusta ou não, embora já se tenham publicado propostas neste sentido (Vrouwenvelder, 2008). Trata-se de um assunto interessante, mas ainda nos estágios iniciais de desenvolvimento (Agarwal & England, 2008). Actualmente a satisfação deste requisito é feito principalmente de forma qualitativa, ao nível das boas práticas de concepção, como por exemplo privilegiando ligações monolíticas.

No que diz respeito ao requisito da durabilidade, salienta-se as maiores exigências regulamentares actuais, particularmente em estruturas de betão armado (NP EN 206-1, 2007), fruto da tomada de consciência da importância deste problema. No entanto, subsistem dificuldades no seu tratamento quantitativo. Embora muitos dos mecanismos de degradação estejam relativamente bem estudados e as causas que lhes dão origem relativamente bem identificadas (como é o caso, por exemplo, da corrosão das armaduras em estruturas de betão armado) é sobretudo nos modelos de previsão que subsistem dúvidas importantes. Com efeito, verificam-se frequentemente desvios significativos entre valores preditos por esses modelos e valores medidos experimentalmente (Casas, 2006). Isto faz com que a verificação do desempenho das estruturas com respeito à durabilidade não tenha ainda, na prática, um tratamento quantitativo como têm os dois primeiros requisitos mencionados (serviço e segurança), embora se deva registar o esforço internacional que tem sido feito no sentido de suprir esta lacuna (fib, 2006).

A verificação do desempenho das estruturas aos requisitos de serviço e segurança é feito recorrendo ao chamado *método dos estados limites*. O objectivo deste Capítulo é apresentar a essência deste método e dos conceitos que com ele estão relacionados. Introduce-se a essência do paradigma Bayesiano e descrevem-se sucintamente os métodos (ou formatos) de fiabilidade.

2.2 Conceitos de estado limite, fiabilidade e segurança

2.2.1 Conceito de estado limite

Estado limite é uma condição a partir da qual a estrutura deixa de cumprir um ou mais requisitos, ficando de alguma forma prejudicada no desempenho das funções para que foi construída. Consoante a gravidade dos prejuízos, os estados limites classificam-se em dois grandes grupos:

- a) Estados limites de utilização: estados associados a danos pouco severos e que não obrigam ao encerramento da estrutura. Tratam-se de danos susceptíveis de prejudicar o conforto das pessoas, o aspecto da estrutura, o seu funcionamento ou a durabilidade.
- b) Estados limites últimos: estados associados a danos graves e que implicam o encerramento da estrutura. Deve-se salientar que os estados limites últimos dizem respeito não só à segurança da estrutura em si (sua integridade física) mas também (e sobretudo) à segurança dos utilizadores e das pessoas na vizinhança da estrutura (NP EN 1990, 2009, §3.3 (1)). Isto significa que qualquer estado adverso numa estrutura que comprometa a segurança de pessoas é suficientemente grave para que seja classificado como estado limite último.

Note-se a correspondência entre o requisito de serviço (ou utilização) e o conceito de estado limite de serviço (ou de utilização) e entre o requisito de segurança e o conceito de estado limite último. A verificação do desempenho das estruturas face ao requisito de serviço é feita através dos estados limites de serviço e a verificação do desempenho face ao requisito da segurança é feita através dos estados limites últimos. No seguimento desta linha de correspondência, é interessante notar que as especificações LNEC E-464 (2007a) e LNEC E-465 (2007b), que tratam especificamente de questões de durabilidade e vida útil, introduzem o conceito de *estado limite de durabilidade*, o qual, à semelhança dos anteriores estados limite, constitui um critério quantitativo para verificação do desempenho das estruturas face ao requisito de durabilidade. Julga-se que haverá vantagem em tratar o requisito da robustez de forma idêntica, isto é, introduzindo o conceito de *estado limite de robustez*. Desta forma consegue-se uma uniformização desejável nos métodos de verificação do desempenho das estruturas. Embora interessantes, não se farão comentários adicionais em relação a estes assuntos, por saírem do âmbito do presente trabalho.

Enfatiza-se que a distinção entre estado limite de utilização e estado limite último é feita fundamentalmente pela gravidade desses estados, isto é, as consequências mais

ou menos severas que advêm se tais estados forem ultrapassados. Os primeiros não impedem que a estrutura continue a ser utilizada, mas os segundos obrigam ao encerramento da estrutura. No entanto, é ainda possível diferenciar a gravidade dentro de cada um dos estados limite referidos. Por exemplo, os estados limites de serviço podem ser reversíveis (menos graves) ou irreversíveis (mais graves). Os estados limites últimos podem ser precedidos de aviso ou ocorrer repentinamente. Naturalmente estes últimos são mais graves. Por exemplo, uma rotura frágil ocorre com pequenas deformações (não avisa), mas uma rotura dúctil, por estar associada a grandes deformações, provavelmente será detectada mesmo antes de se atingir o limite, possibilitando tomar medidas (como a evacuação de pessoas), e portanto é menos grave que uma rotura frágil. Um colapso global é evidentemente mais grave do que um colapso parcial.

A diferenciação de gravidade dos estados limites deve reflectir-se nos níveis de fiabilidade pretendidos para esses estados limites. Estados limites mais graves devem ter probabilidades de ocorrência menores, e portanto valores de fiabilidade superiores. É este o sentido da expressão «níveis apropriados de fiabilidade» que consta no objectivo geral para estruturas apresentado no início deste capítulo.

Como exemplos de estados limites últimos podem citar-se:

- perda de equilíbrio da estrutura considerada como corpo rígido;
- estado limite de resistência ou deformação excessiva;
- perda de resistência por fenómenos de fadiga;
- transformação da estrutura num mecanismo;
- instabilidade da estrutura ou de uma das suas partes.

Como exemplos de estados limites de serviço citam-se os seguintes:

- danos locais susceptíveis de acelerar a deterioração ou prejudicar a aparência (fissuração, por exemplo);
- deformação incompatível com o bom funcionamento de elementos não estruturais, ou que prejudique a aparência da estrutura.
- vibrações excessivas, susceptíveis de causar desconforto nas pessoas.

Do exposto acima, pode concluir-se que os estados limites correspondem a critérios específicos, ou requisitos específicos, cujo cumprimento permite garantir um bom desempenho face aos requisitos fundamentais apresentados anteriormente. Conforme veremos, tais critérios ou requisitos específicos são quantificados através das chamadas *funções estado limite*, ou *funções de desempenho*.

2.2.2 Conceitos de fiabilidade e segurança

A Norma NP EN 1990 (2009) define fiabilidade (*reliability*) como a aptidão de uma estrutura ou de um elemento estrutural em satisfazer os requisitos que lhe foram exigidos, satisfação esta que deve perdurar durante o período de vida útil para o qual foi projectada. Acrescenta a Norma que tal aptidão é medida, em geral, em termos probabilísticos. A fiabilidade é pois um conceito probabilístico. Mais precisamente e tomando como referência um intervalo de tempo particular e um estado limite específico, a fiabilidade da estrutura em relação a esse estado limite e a esse intervalo de tempo é a probabilidade de não se atingir esse estado limite durante esse intervalo de tempo. Assim, de acordo com esta definição, o conceito de fiabilidade está sempre associado a um requisito (ou vários requisitos em simultâneo) e a um intervalo de tempo específico. Trata-se de uma grandeza quantitativa, susceptível de ser calculada ou estimada.

Contrariamente ao conceito de fiabilidade, o conceito de segurança é um conceito qualitativo (Schneider, 2006). Com efeito, não faz sentido a expressão «calcular a segurança», ou atribuir um valor à segurança. Uma estrutura ou é segura ou não é segura. Uma estrutura é insegura quando a sua fiabilidade for inferior a um mínimo considerado aceitável. Como se disse anteriormente, deve-se ter presente que o termo segurança diz respeito não só à estrutura em si, mas sobretudo à segurança das pessoas cuja integridade física seja posta em causa pelo eventual colapso estrutural. A este respeito é interessante notar a definição de segurança apresentada na Norma ISO/FDIS 19338 (2007): *Ability of a structure or structural element to assure no casualty to users of, and people around, the structure, within the limits of acceptable probability*. De acordo com esta definição, uma estrutura insegura é uma estrutura cuja probabilidade de causar danos em pessoas não é aceitável. A ênfase é assim dada na protecção de pessoas, embora se deva também ter presente a necessidade de proteger bens.

Deve referir-se que na língua portuguesa o termo segurança é frequentemente usado com um sentido mais amplo do que o utilizado na língua inglesa, abrangendo qualquer estado desfavorável, e não apenas os estados susceptíveis de por em perigo a vida de pessoas e bens. Com efeito, é frequente o uso da expressão «verificação da segurança» que significa verificação da satisfação dos diferentes requisitos exigidos, e abrange naturalmente todos os requisitos, e não apenas os requisitos de segurança propriamente ditos.

2.3 A verificação da segurança aos estados limites

2.3.1 O método dos estados limites

A verificação da segurança pelo *método dos estados limites* consiste em geral em comparar uma grandeza actuante E com uma grandeza resistente R , expressa nas mesmas unidades que E , procurando-se garantir que:

$$E \leq R. \quad (2.1)$$

Se esta condição for cumprida, diz-se que *está satisfeita a segurança*.

A grandeza actuante E está relacionada com as acções que actuam na estrutura e pode incluir uma carga, um esforço ou um deslocamento imposto. A grandeza R diz respeito à capacidade da estrutura face à grandeza actuante, e a sua quantificação envolve em geral alguma espécie de convenção.

A condição $E \leq R$, por vezes referida como condição de segurança, pode ser abordada de forma semi-probabilística ou de forma probabilística, como se analisa nas próximas sub-secções.

2.3.2 Abordagem semi-probabilística da segurança estrutural

Na abordagem semi-probabilística, as grandezas E e R são representadas por um único valor, chamado valor de dimensionamento, representado respectivamente por E_d e R_d . A condição de segurança assume então a forma (Borges & Castanheta, 1985):

$$E_d \leq R_d, \quad (2.2)$$

na qual os valores de dimensionamento são dados por:

$$E_d = \gamma_f E_k; \quad R_d = \frac{R_k}{\gamma_m}. \quad (2.3)$$

Os factores γ_f e γ_m designam-se por factores de segurança, ou coeficientes parciais de segurança, respectivamente para forças e propriedades dos materiais. As quantidades E_k e R_k designam, respectivamente, os valores característicos das variáveis E e R . Recorde-se que o valor característico de uma variável X refere-se ao quantilho p da sua distribuição de probabilidade, que é em geral de 0.95 para acções e de 0.05 para propriedades dos materiais. Assim, se $F_X(x)$ representar a distribuição acumulada de X , o valor característico de X será $X_k = F_X^{-1}(p)$. (Figura 2.1). Deve-se salientar que a atribuição destes quantis é perfeitamente convencional. Na verdade poder-se-iam usar quaisquer outros quantis, desde que os coeficientes

parciais de segurança fossem corrigidos em conformidade. Em particular poder-se-iam utilizar quantis a que correspondessem coeficientes parciais de segurança unitários.

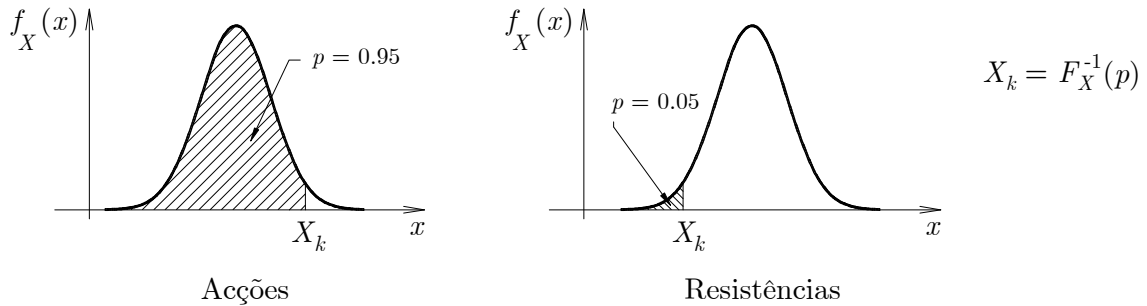


Figura 2.1: Definição de valores característicos para acções e resistências.

O método subjacente à Eq. (2.2) é chamado *método dos coeficientes parciais de segurança*, e faz parte dos chamados métodos de nível I. Este método, como substituto do *método das tensões admissíveis*, tem vindo a ser aplicado com bons resultados desde os anos 40 e tem como principal vantagem a sua simplicidade (Madsen *et al.*, 1986). Apresenta, no entanto, algumas limitações. Por exemplo, se se alterar os coeficientes de segurança, este método não permite quantificar o impacto que tais alterações têm em termos de risco para a estrutura.

2.3.3 Abordagem probabilística da segurança estrutural

Na abordagem probabilística, as grandezas E e R são modeladas como variáveis aleatórias, isto é, são representadas não por um único valor, mas por uma distribuição de probabilidade. Uma vez atribuídas distribuições de probabilidade a E e R , pode-se avaliar sem dificuldade a probabilidade do evento $E > R$, probabilidade esta denotada aqui por p_f . Portanto, $p_f = P(E > R)$ representa a probabilidade de se violar a condição de segurança $E \leq R$.

A probabilidade p_f , que na literatura inglesa é denominada *failure probability* ou *probability of failure*, refere-se assim à probabilidade de se exceder um determinado estado limite. Tal expressão costuma ser traduzida por expressões tais como «probabilidade de ruína», «probabilidade de rotura» ou «probabilidade de colapso». Deve admitir-se, porém, que estas traduções não são inteiramente satisfatórias, já que os termos ruína, rotura e colapso denotam claramente estados limites últimos e o termo inglês *failure probability* aplica-se tanto a estados limites últimos como a estados limites de serviço. Nesta dissertação irá usar-se a tradução literal, isto é, «probabilidade de falha», ficando entendido que falha estrutural denota simplesmente a ocorrência de um dano estrutural e engloba naturalmente não só estados limites últimos mas também estados limites de utilização.

A equação $p_f = P(E > R)$, pode ser reescrita na forma:

$$p_f = P(R - E < 0) = P(g(R, E) < 0), \quad (2.4)$$

com $g(R, E) = R - E$. A função $M = g(R, E)$ designa-se por *função estado limite*, ou *função desempenho*, e M designa-se por *margem de segurança*. Visto que R e E são variáveis aleatórias, M é também variável aleatória. Portanto, a probabilidade de se violar o estado limite é igual à probabilidade da margem de segurança ser negativa, isto é, $p_f = P(M < 0)$.

Na abordagem probabilística da segurança estrutural procura-se que a probabilidade p_f seja inferior a um valor previamente aceite como máximo admissível, ou valor-alvo (*target*), aqui representado por p_{fT} . Assim, de um ponto de vista probabilístico, a verificação da segurança consiste em comprovar a satisfação da condição:

$$p_f \leq p_{fT}. \quad (2.5)$$

A verificação da condição acima deve ser estendida a todos os estados limites relevantes. Um estado limite não é relevante quando a verificação da segurança em relação a esse estado limite estiver automaticamente assegurada pela satisfação da segurança em relação a outros estados limites. Observe-se que a probabilidade p_{fT} varia para cada estado limite, pois deve reflectir a gravidade desse estado limite, devendo ser tanto mais baixa quanto mais grave for o estado limite em apreço.

A verificação da segurança de uma estrutura passa então pela identificação criteriosa de todos os estados limites relevantes. Se a segurança estiver assegurada para todos os estados limites, isto é, se a fiabilidade associada a cada estado limite for aceitável, então considera-se que a fiabilidade da estrutura como um todo é aceitável. Este continua a ser o princípio base do dimensionamento das estruturas consagrado nos eurocódigos.

Quando a fiabilidade de uma estrutura é avaliada estado limite a estado limite, diz-se que se efectua uma análise de fiabilidade ao nível do elemento. Quando determinado modo de ruína envolve mais do que um estado limite, diz-se que a análise da fiabilidade em relação a esse modo de ruína é uma análise ao nível do sistema. Por exemplo, o colapso de uma estrutura hiperstática, entendido como a transformação da estrutura num mecanismo, envolve a ocorrência simultânea de mais do que um estado limite. Na secção 2.11 discute-se brevemente os princípios teóricos da fiabilidade de sistemas.

2.4 Generalização do conceito de função estado limite. Modelos de transformação.

Na sua forma mais simples, os estados limites envolvem apenas duas grandezas, uma grandeza actuante E e uma grandeza resistente R . Como se viu, a função estado limite implícita na condição $E \leq R$ é a função $M = g(R, E) = R - E$. É claro que no caso geral haverá mais do que apenas duas variáveis, pois R e E são, frequentemente, funções de outras variáveis. Suponha-se que na definição de um estado limite específico intervêm n variáveis, (X_1, \dots, X_n) . Então esse estado limite é representado por uma função $M = g(X_1, \dots, X_n)$, definida de tal maneira que (ISO 2394, 1998):

- $g(X_1, \dots, X_n) > 0$ representa estados desejáveis (segurança);
- $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ representa estado limite;
- $g(X_1, \dots, X_n) < 0$ representa estados indesejáveis (insegurança).

Assim, $M > 0$ representa estados de segurança, $M = 0$ indica estado limite e $M < 0$ denota estados de insegurança. A equação $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ designa-se por equação estado limite, ou ainda, por *superfície de falha*. A superfície de falha separa assim duas regiões, uma contendo estados favoráveis e outra contendo estados desfavoráveis. No caso de existirem apenas duas variáveis, a equação estado limite é naturalmente a equação de uma linha. Se existirem três variáveis trata-se efectivamente da equação de uma superfície.

O vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ é chamado vector das variáveis básicas e são assim chamadas por não resultarem de outras variáveis (Kiureghian & Ditlevsen, 2009). Em geral, nos problemas de fiabilidade estrutural, as variáveis básicas são quantidades observáveis e incluem:

- acções, incluindo influências ambientais;
- propriedades dos materiais, incluindo solos;
- parâmetros geométricos.

No entanto, como se verá, as variáveis básicas podem ainda incluir certos parâmetros não observáveis, como os destinados a caracterizar a incerteza nos modelos de transformação (a definir de seguida) e os parâmetros dos modelos probabilísticos que, na abordagem Bayesiana, são modelados como variáveis aleatórias.

Considere-se novamente a função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$. A função g descreve o modo como a margem de segurança M é obtida a partir das variáveis (X_1, \dots, X_n) e em geral não pode ser representada por uma função matemática directa, devendo, por conseguinte, ser entendida de forma simbólica. Com efeito, na definição

de um estado limite específico é necessário empregar frequentemente variáveis que são funções de outras variáveis. Estas funções, que podem inclusivamente consistir em algoritmos, são chamados modelos de transformação.

A Figura 2.2 põe em evidência a relação entre estes modelos e as variáveis básicas:

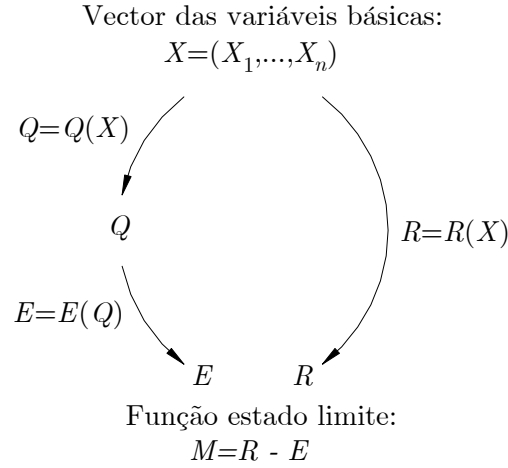


Figura 2.2: Modelos de transformação.

Assim, de acordo com a Figura, a função $M = g(X_1, \dots, X_n)$ envolve três tipos de modelos de transformação, a saber:

- 1) *Modelos de acções*, $Q = Q(X)$, que transformam variáveis básicas em acções.
- 2) *Modelos estruturais*, $E = E(Q)$, que transformam acções em efeitos de acções (esforços, tensões, deslocamentos, deformações).
- 3) *Modelos de resistência*, $R = R(X)$, que transformam variáveis básicas (parâmetros dos materiais e quantidades geométricas) em resistências correspondentes aos efeitos das acções.

É claro que estes modelos não traduzem a realidade em perfeição, originando novas incertezas. De acordo com o paradigma Bayesiano, tais incertezas deverão ser descritas por meio de variáveis aleatórias, habitualmente representas pelas letras gregas $\theta_1, \theta_2, \dots$, tantas quanto os modelos de transformação existentes. Estas variáveis devem ser acrescentadas ao vector das variáveis básicas e em geral são incluídas nos modelos de transformação $Y = Y(X)$ numa das seguintes formas: $Y = \theta Y(X)$ ou $Y = Y(X) + \theta$.

2.5 Caracterização das incertezas nos problemas de fiabilidade estrutural

2.5.1 Fontes de incerteza

A incerteza associada a cada variável básica pode ser maior ou menor, mas em geral não pode ser ignorada. Uma excepção diz respeito aos parâmetros geométricos, cuja variabilidade pode ser considerada pequena ou desprezável em comparação com a variabilidade das acções e propriedades dos materiais (JCSS, 2001a). É importante compreender, porém, que a variabilidade não é a única fonte de incerteza. Enumera-se de seguida as principais fontes de incerteza nos problemas de fiabilidade estrutural (Kiureghian & Ditlevsen, 2009):

- 1) Incerteza originada na variabilidade inerente de algumas das variáveis básicas, como por exemplo a resistência do betão numa estrutura ou a velocidade do vento em determinada localidade. Tratam-se de grandezas com variabilidade própria: a resistência do betão varia de local para local na estrutura (além de variar ao longo do tempo) e a velocidade do vento varia de intensidade e direcção ao longo do tempo.
- 2) Incerteza originada na escolha de modelos probabilísticos para a caracterização das variáveis básicas. Por exemplo, acontece com frequência existir mais do que um modelo probabilístico que se ajusta bem a um determinado histograma. No entanto, cálculos probabilísticos baseados nesses modelos igualmente «bons» podem diferir bastante, especialmente se se estiver a trabalhar na zona das caudas das distribuições, como é frequente nos problemas de fiabilidade estrutural.
- 3) Incerteza resultante da estimativa dos parâmetros dos modelos probabilísticos a partir de amostras, que naturalmente são de dimensão finita. Duas amostras extraídas da mesma população conduzem invariavelmente a diferentes estimativas desses parâmetros, o que naturalmente gera incerteza nos valores estimados. A abordagem Bayesiana é especialmente eficaz na modelação deste tipo de incerteza, conhecida por incerteza estatística (Engelund & Rackwitz, 1992).
- 4) Incerteza associada à definição dos modelos de transformação. Frequentemente é necessário introduzir hipóteses simplificativas nestes modelos, o que, naturalmente, gera incerteza nos valores preditos por tais modelos.

- 5) Se os modelos de transformação dependerem de parâmetros a serem estimados por regressão a partir de dados experimentais, há também lugar a incerteza estatística na estimação destes parâmetros (Kiureghian, 2008).
- 6) Incerteza originada em erros de medição. As amostras das variáveis básicas, a partir das quais se atribui um determinado modelo probabilístico e se estimam os respectivos parâmetros, são em geral obtidas por meio de algum processo de medição, que sempre contém erro.
- 7) Incerteza originada em erros de natureza numérica na avaliação dos modelos de transformação. Por exemplo, quando se avaliam os efeitos das acções por meio de modelos de elementos finitos, existem erros de arredondamento e erros associados às tolerâncias adoptadas em critérios de convergência.
- 8) Incerteza originada em erros humanos não intencionais, quer os ocorridos durante o projecto e construção, quer os ocorridos durante a fase de exploração das estruturas.

É claro que as incertezas descritas acima não são todas igualmente importantes em magnitude. Por exemplo, a incerteza originada nos erros numéricos envolvidos nos modelos estruturais certamente é bastante inferior à incerteza dos próprios modelos. Isto significa que algumas incertezas poderão ser desprezadas em comparação com outras. Quando a incerteza numa determinada variável é desprezável, isso equivale a assumir essa variável como determinística.

2.5.2 Incerteza aleatória *versus* incerteza epistémica

As diferentes fontes de incerteza são em geral agrupadas em duas grandes categorias (JCSS, 2008):

- incerteza intrínseca ou aleatória;
- incerteza epistémica $\left\{ \begin{array}{l} \text{incerteza estatística;} \\ \text{incerteza de modelação.} \end{array} \right.$

A primeira, também chamada incerteza do tipo 1, que se caracteriza pela impossibilidade de ser reduzida, está associada aos fenómenos imprevisíveis, isto é, fenómenos que são por inerência aleatórios.

A segunda, também chamada incerteza do tipo 2, está associada à limitação do conhecimento existente e, naturalmente, é susceptível de ser reduzida através de investigação e recolha de dados adicionais. Pode ser subdividida em dois tipos: a chamada incerteza estatística, devida à limitação da dimensão das amostras disponíveis, e a chamada incerteza de modelação, devida à imprecisão dos modelos de

transformação usados no problema em estudo, imprecisão que pode dever-se a falta de conhecimento completo ou mesmo a simplificações assumidas conscientemente nesses modelos.

Deve-se referir que muitas das fontes de incerteza têm uma parcela aleatória e uma parcela epistémica. Por exemplo, considere-se a incerteza proveniente de erros humanos não intencionais. Uma parte pode ser reduzida com o aumento do controlo de qualidade, mas a parte devida à própria limitação humana não pode ser reduzida (Melchers, 1999). Considere-se ainda o caso das incertezas associadas a erros de medição. Uma parte da incerteza pode ser reduzida com uso de equipamentos de medição mais precisos, mas isso só pode ser conseguido até certo limite — haverá sempre uma componente puramente aleatória que não poderá ser eliminada.

Convém no entanto referir que a fronteira que separa os dois tipos de incerteza não é totalmente nítida. Com efeito, um fenómeno que hoje é considerado completamente imprevisível pode não sê-lo no futuro. Por outras palavras, deve-se ter presente que até mesmo a incerteza do tipo aleatório tem o potencial de ser reduzida (Kiureghian & Ditlevsen, 2009).

Apesar destas diferenças, como se analisa no Capítulo 4, todas as variáveis básicas sujeitas a incerteza, seja do tipo aleatório, seja do tipo epistémico, deverão ser descritas por meio de distribuições de probabilidade. Este é o princípio fundamental da abordagem Bayesiana (Paulino *et al.* 2003), a explorar neste trabalho. Portanto, a abordagem Bayesiana não faz distinção no tratamento das incertezas do tipo 1 e do tipo 2. Esta abordagem alarga substancialmente o campo de aplicação da teoria das probabilidades, visto que a grande maioria dos problemas reais, dos quais os problemas de segurança estrutural não são excepção, contêm incertezas do tipo 2.

Pese embora o facto de não ser feita distinção no modo de tratar as incertezas aleatória e epistémica (ambas são descritas por modelos probabilísticos), é importante discernir a presença desses dois tipos de incerteza, pois isso tem reflexo na interpretação das probabilidades calculadas. Com efeito, sempre que existirem incertezas do tipo 2, as probabilidades calculadas deverão ser interpretadas como *estimativas* dos verdadeiros valores das probabilidades procuradas, condicionadas à informação e conhecimento existentes. Tal é o caso da probabilidade de falha p_f , definida anteriormente. Sempre que se obtenham novas informações, susceptíveis de actualizar os modelos probabilísticos das variáveis básicas, as probabilidades calculadas deverão ser actualizadas em conformidade. Isto significa que a probabilidade p_f não deve ser encarada como frequência de colapsos. Quando muito, pode ser encarada como uma estimativa dessa frequência.

Além disso, a experiência tem mostrado que os colapsos estruturais devem-se em geral a erros humanos graves, que são normalmente excluídos da teoria da fiabilidade estrutural (Schneider, 2006) e portanto não contemplados na estimativa de p_f . Assim, também por este motivo, a probabilidade de falha não traduz frequência de colapsos, devendo por conseguinte ser encarada meramente como um valor de referência, a usar para efeitos comparativos e em problemas de decisão.

2.6 O problema fundamental da fiabilidade estrutural

Considere-se o estado limite definido pela função $M = g(X)$, com $X = (X_1, \dots, X_n)$ representando o vector das variáveis básicas. O problema fundamental da fiabilidade estrutural consiste em avaliar a probabilidade de violação desse estado limite, isto é, avaliar a probabilidade:

$$p_f = P(M < 0) = P[g(X) < 0]. \quad (2.6)$$

Visto que as variáveis $X = (X_1, \dots, X_n)$ são variáveis aleatórias, a função g é uma função de variáveis aleatórias, pelo que a margem de segurança M é também variável aleatória. A probabilidade de falha pode ser expressa em termos da distribuição de M ou em termos da distribuição conjunta do vector $X = (X_1, \dots, X_n)$, isto é:

$$p_f = P(M < 0) = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = \iint_{X: g(X) < 0} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.7)$$

Particularize-se a formulação acima para o caso do problema de fiabilidade com apenas duas variáveis E e R , representando, respectivamente, efeito de acção e resistência correspondente. A função estado limite é então dada por $M = g(R, E) = R - E$. Seja $f_R(r)$ a distribuição de probabilidade marginal de R , $f_E(e)$ a distribuição de probabilidade marginal de E e $f_{RE}(r, e)$ a distribuição de probabilidade conjunta do vector (R, E) . A probabilidade de falha é dada por (Figura 2.3):

$$p_f = P(M < 0) = P(g(R, E) < 0) = \iint_{(r, e): g < 0} f_{RE}(r, e) dr de, \quad (2.8)$$

podendo ser então interpretada como um volume.

Se R e E forem independentes, então $f_{RE}(r, e) = f_R(r)f_E(e)$, podendo escrever-se:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^e f_R(r) f_E(e) dr de = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(e) \int_0^e f_R(r) dr de = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(e) f_E(e) de. \quad (2.9)$$

Este integral é conhecido como integral de convolução (Melchers, 1999).

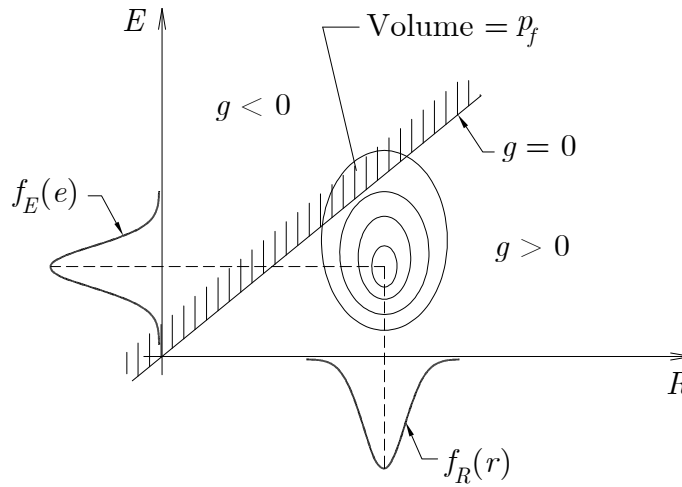


Figura 2.3: Representação gráfica do problema básico de duas variáveis.

2.7 Índice de fiabilidade

Como visto anteriormente, a fiabilidade de uma estrutura relativamente a um estado limite e a um intervalo de tempo Δt é a probabilidade de não se atingir esse estado limite durante esse intervalo de tempo. Assim, designando a probabilidade de se atingir esse estado limite durante esse intervalo de tempo por $p_f(\Delta t)$, a fiabilidade é o complementar dessa probabilidade, isto é:

$$r(\Delta t) = 1 - p_f(\Delta t). \quad (2.10)$$

Nas situações comuns, a probabilidade de falha é em geral uma quantidade muito pequena, da ordem de 10^{-5} para estados limites últimos, criando dificuldades numéricas no seu manuseio. Por esta razão, é usual medir a fiabilidade por meio de uma grandeza alternativa que transforma p_f numa quantidade bastante maior. Essa grandeza, designada por *índice de fiabilidade* e representada em geral por β , é definida pela expressão:

$$\beta : p_f = \Phi(-\beta) \Leftrightarrow \beta = -\Phi^{-1}(p_f) = \Phi^{-1}(r), \quad (2.11)$$

onde Φ representa a FDC da distribuição normal reduzida. O índice de fiabilidade pode então ser convertido em probabilidade de falha e vice-versa, constituindo assim uma medida equivalente de fiabilidade. Observe-se que uma probabilidade de falha de 0.5 corresponde a $\beta = 0$. Probabilidades de falha acima de 0.5 correspondem a índices de fiabilidade negativos.

O índice β , como medida de fiabilidade, apresenta várias vantagens em relação à probabilidade de falha. Uma das vantagens resulta da eliminação das dificuldades já mencionadas relativas ao facto da probabilidade de falha ser uma quantidade muito

pequena. Por exemplo, um índice de fiabilidade de 3.8 corresponde a uma probabilidade de falha de 7.2×10^{-5} . Se se aumentar o índice de fiabilidade para 3.9, que corresponde a uma variação de apenas 2.6%, tal corresponde a uma variação de 50% na probabilidade de falha. O índice de fiabilidade é assim uma quantidade mais estável e portanto mais cómoda para se trabalhar.

Outra vantagem reside nas propriedades interessantes que o índice de fiabilidade apresenta, que se analisam de seguida. Suponha-se que a margem de segurança M associada a um determinado estado limite tem distribuição Normal, isto é, $M \sim N(\mu_M, \sigma_M)$, onde μ_M e σ_M representam, respectivamente, a média e desvio padrão da margem de segurança. Portanto,

$$p_f = P(M < 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right). \quad (2.12)$$

Comparando (2.12) com (2.11) conclui-se que, para um estado limite cuja margem de segurança siga uma lei normal, $\beta = \mu_M / \sigma_M$, ou seja, quando $M \sim N(\mu_M, \sigma_M)$, o índice de fiabilidade é calculado directamente a partir dos dois primeiros momentos da variável M . Conforme ilustrado na Figura 2.4 o índice de fiabilidade β mede a distância, em termos de desvios-padrão, a que o valor médio da margem de segurança está do valor nulo (a que corresponde o limite).

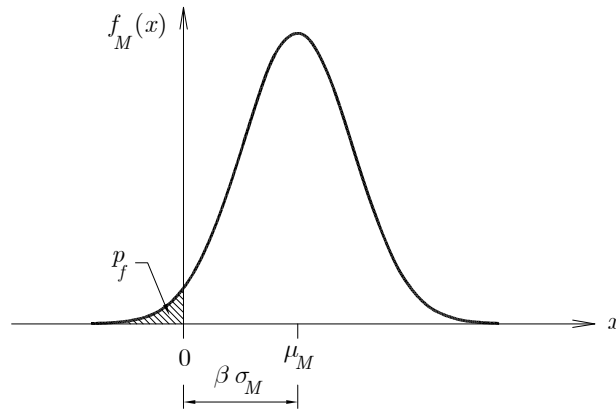


Figura 2.4: Índice de fiabilidade para o caso em que a margem de segurança segue uma lei Normal.

Deve referir-se que o índice de fiabilidade β aparece, historicamente, ligado à conveniência em medir a fiabilidade por meio de uma grandeza que não necessitasse do conhecimento completo da distribuição da margem de segurança M , mas apenas dos seus dois primeiros momentos: μ_M e σ_M . Cornell (1969), citado em Madsen *et al.* (1986), propôs medir a fiabilidade justamente pela quantidade $\beta = \mu_M / \sigma_M$. Actualmente, é usual representar-se essa quantidade por β_c , por um lado, para a

distinguir da definição (2.11) e, por outro lado, como homenagem ao seu autor. A quantidade $\beta_c = \mu_M / \sigma_M$ é conhecida por índice de fiabilidade de Cornell.

O índice de fiabilidade tem também uma interpretação geométrica interessante, interpretação esta que está, aliás, na base dos chamados métodos FORM e SORM. Considere-se a função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$ e admita-se que g é uma combinação linear das variáveis básicas, isto é, g é da forma $g(X_1, \dots, X_n) = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$. Admita-se, além disso, que as variáveis básicas X_i são independentes e normalmente distribuídas, com parâmetros μ_i e σ_i , isto é, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Aplique-se a cada variável X_i a seguinte transformação: $U_i = (X_i - \mu_i) / \sigma_i$. Assim, as variáveis U_i são independentes entre si e têm distribuição $U_i \sim N(0, 1)$. O espaço das novas variáveis (U_1, \dots, U_n) designa-se por espaço normalizado. A função estado limite transformada neste novo espaço será representada por $g_U(U_1, \dots, U_n)$. A superfície de falha no espaço normalizado é então dada pela equação $g_U = 0$ e corresponde à equação de um hiperplano. Nestas condições, constata-se que o índice de fiabilidade β definido por (2.11) coincide com a distância da origem do espaço normalizado à superfície $g_U = 0$.

A Figura 2.5 mostra a interpretação geométrica deste resultado para o problema de fiabilidade de duas variáveis, X_1 e X_2 , transformadas na variáveis U_1 e U_2 , respectivamente.

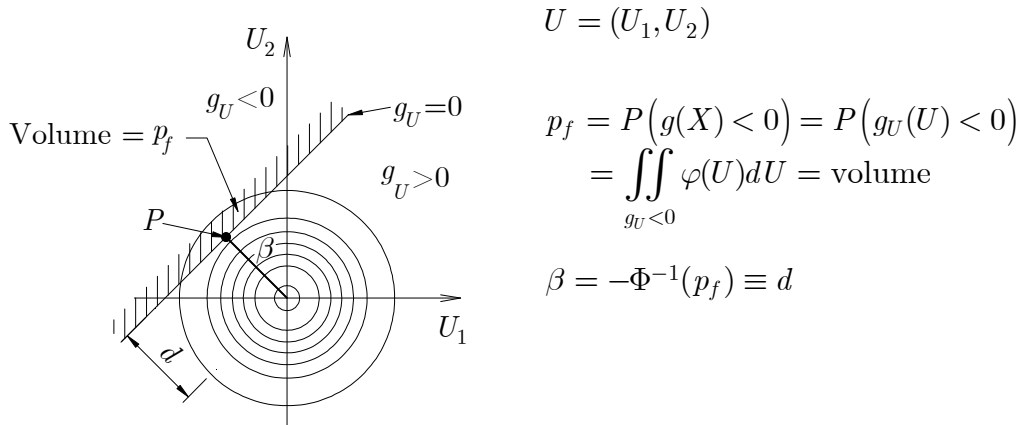


Figura 2.5: Interpretação geométrica do índice de fiabilidade quando as variáveis básicas são normais e independentes e a função g é linear.

Como se percebe pela observação Figura 2.5, o ponto P assinalado é o ponto da superfície de rotura com maior densidade de probabilidade, correspondendo assim ao ponto mais provável para o início de uma eventual rotura. Esse ponto é designado por *ponto de dimensionamento*.

2.8 Fiabilidade estrutural e factor tempo

O conceito de fiabilidade está por definição associado ao factor tempo, pelo que este está sempre presente nos problemas de fiabilidade. No entanto, na literatura da especialidade, os problemas de fiabilidade estrutural são em geral separados em duas grandes categorias: problemas independentes do tempo e problemas dependentes do tempo. Analise-se o que significa um problema de fiabilidade independente do tempo. Suponha-se que se avaliou a probabilidade de falha numa unidade de tempo específica e as variáveis básicas são descritas por meio de distribuições de probabilidade referidas a essa unidade de tempo. Se o problema consistir em avaliar a probabilidade durante um período que envolva várias dessas unidades de tempo em sucessão e se as distribuições de probabilidade não variarem ao longo do tempo, então a probabilidade de falha nos sucessivos intervalos de tempo permanece constante e o problema de fiabilidade diz-se independente do tempo.

Muitas das variáveis básicas, como é o caso das acções, são, por natureza, funções do tempo, e por tal facto, no caso geral, são descritas por meio de processos estocásticos. Recorde-se que um processo estocástico $X(t)$ é uma colecção de variáveis aleatórias em sucessão no tempo — cada uma possuindo a sua própria distribuição de probabilidade. Nos casos em que a deterioração dos materiais não possa ser desprezada no intervalo de tempo em consideração, até mesmo as variáveis de resistência têm de ser descritas por processos estocásticos. Nestes casos a probabilidade de falha não permanece constante em sucessivos intervalos de tempo e o problema de fiabilidade diz-se dependente do tempo.

Muitas vezes, porém, é possível transformar problemas dependentes do tempo em problemas independentes do tempo. Uma forma de o fazer consiste em discretizar os processos estocásticos no tempo e utilizar distribuições de máximos.

Considere-se novamente o problema de fiabilidade de duas variáveis, E e R , a primeira representando efeito de acção e a segunda representando a resistência correspondente. Suponha-se que se deseja determinar a probabilidade de falha num intervalo de tempo específico Δt , denominado *período de referência*. Admita-se que no período de referência não há qualquer deterioração significativa dos materiais, o que equivale a afirmar que R permanece constante nesse intervalo. Se o intervalo Δt não for muito grande esta hipótese é razoável. A Figura 2.6 mostra uma realização particular dos processos R e $E(t)$ no intervalo Δt .

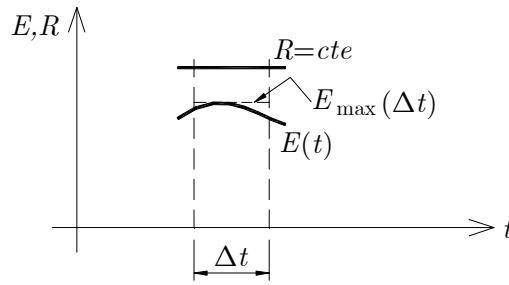


Figura 2.6: Realização particular dos processos $E(t)$ e $R(t)$.

Fica então evidente que a probabilidade de falha no intervalo Δt é dada por

$$p_f(\Delta t) = P[E_{\max}(\Delta t) > R] \quad (2.13)$$

o que significa que para determinar tal probabilidade não é necessário conhecer todo o processo $E(t)$ em Δt mas apenas o seu máximo nesse intervalo. Observa-se assim que as distribuições de máximos, que em conjunto com as distribuições de mínimos são conhecidas como distribuições de extremos, desempenham um papel importante nos problemas de fiabilidade.

Analise-se agora o que se passa numa sucessão de n intervalos de tempo Δt . Admita-se que os máximos de $E(t)$ em intervalos sucessivos são independentes* e que as distribuições $f_{E_{\max}}(x)$ permanecem constantes no tempo (processo estacionário). O processo $E_{\max}(\Delta t)$ é assim um processo com valores constantes (processo rectangular) e independentes em intervalos Δt sucessivos. Os engenheiros Ferry Borges e Mário Castanheta empregaram processos com essas características nos estudos das combinações de acções que realizaram (Borges & Castanheta, 1985). Em sua homenagem, tais processos são em geral conhecidos como processos FBC (JCSS, 2001a).

Relativamente à resistência R admita-se também a estacionaridade ao longo do tempo, o que na verdade só é válido se não existir deterioração. Sob estas hipóteses, a probabilidade $p_f(\Delta t)$ permanece constante em intervalos de tempo sucessivos (Figura 2.7).

* O intervalo de tempo Δt pode ser escolhido de forma a tornar plausível a hipótese da independência. Quanto maior for Δt mais plausível é tal hipótese.

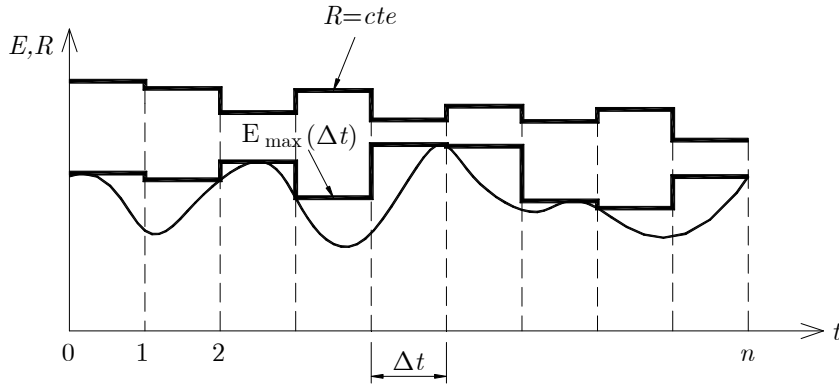


Figura 2.7: Realização particular dos processos $E(t)$, $R(\Delta t)$ e $E_{\max}(\Delta t)$ numa sucessão de intervalos de tempo.

A probabilidade de falha no período $[0, n]$ é então dada por:

$$p_f(0, n) = 1 - P[\text{não ocorrência de falha em } [0, n]] = 1 - [1 - p_f(\Delta t)]^n \quad (2.14)$$

onde n representa o número total de intervalos de tempo considerado. Observe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_f(0, n) = 1$, como se pode observar na Figura 2.8. A expressão (2.14) permite determinar a probabilidade de falha num período mais longo a partir do conhecimento da probabilidade de falha num período mais pequeno. Resolvendo essa expressão em ordem a $p_f(\Delta t)$, é possível determinar a probabilidade de falha num período menor a partir do conhecimento da probabilidade de falha num período maior. Enfatiza-se que se está a assumir que os processos estocásticos envolvidos são estacionários.

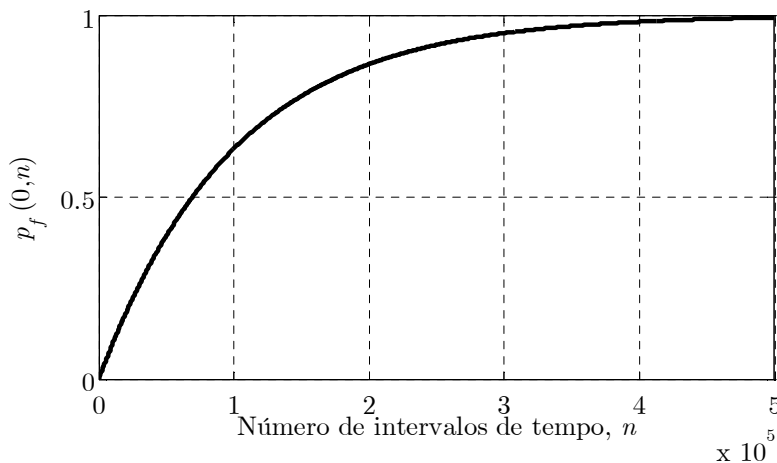


Figura 2.8: Probabilidade de falha durante n intervalos de tempo, em função de n .

Em geral, a probabilidade $p_f(\Delta t)$ é bastante pequena, sendo admissível a seguinte aproximação:

$$p_f(0, n) \cong np_f(\Delta t) \quad (2.15)$$

A título de exemplo, suponha-se que $p_f(\Delta t = 1 \text{ ano}) = 10^{-5}$ e deseja-se determinar a probabilidade de falha nos próximos 50 anos (admitindo estacionaridade e independência nos processos estocásticos). Ambas as equações (2.14) e (2.15) conduzem a $p_f(50 \text{ anos}) = 50 \times 10^{-5}$.

2.9 Níveis de fiabilidade alvo

As normas NP EN 1990 (2009) e ISO 2394 (1998) e o *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a) recomendam valores para os índices de fiabilidade e designam esses valores por valores alvo (*target values*), em geral representados por β_T . Podem ser encarados como valores mínimos de fiabilidade, procurando-se que a estrutura em análise tenha uma fiabilidade igual ou superior a esses valores. Podem também ser encarados como valores a alcançar por objectivo sempre que sejam usados para efeitos de calibração dos coeficientes parciais de segurança. Índices de fiabilidade significativamente diferentes desses valores alvo, quer por defeito, quer por excesso, tenderão a penalizar a economia da estrutura numa perspectiva de longo prazo. Índices de fiabilidade demasiado altos penalizam os custos iniciais e valores demasiado baixos penalizam os custos esperados a longo prazo, devido ao aumento do risco de uma falha estrutural.

Valores óptimos do índice de fiabilidade dependem fundamentalmente de duas grandezas: (1) gravidade das consequências da violação do estado limite em causa e (2) custo relativo das medidas para o aumento de segurança. É claro que o problema da optimização da fiabilidade não é de fácil resolução e de forma alguma é consensual, pois depende de valores sensíveis como é o caso do valor da vida humana (Diamantidis & Bazzurro, 2007). Por tal razão não admira que diferentes fontes recomendem diferentes valores alvo. Por outro lado, uma vez que uma das variáveis intervenientes é o custo relativo das medidas para o aumento de segurança e esse custo é em geral superior em estruturas existentes (comparativamente com estruturas ainda em fase de projecto) compreende-se que existam documentos que recomendam índices de fiabilidade distintos para estruturas novas e estruturas existentes. No próximo capítulo analisam-se algumas recomendações para pontes existentes. Nesta secção resumem-se as recomendações das três fontes mencionadas acima, todas elas vocacionadas para o projecto de estruturas novas.

As recomendações da NP EN 1990 (2009) estão resumidas na Tabela 2.1. Os valores são apresentados para diferentes classes de fiabilidade (*Reliability Classes*), RC1, RC2 e RC3 que correspondem a consequências de falha, respectivamente,

baixas, médias e altas. As consequências de falha, isto é, os prejuízos que advêm caso os estados limites sejam atingidos, incluem perdas de vidas humanas, perdas económicas, prejuízos ambientais e sociais.

A Tabela 2.1 mostra índices de fiabilidades para dois períodos de referência: 1 e 50 anos. Por exemplo, para estados limites últimos e classe de fiabilidade RC2, a Norma recomenda uma fiabilidade de 3.8 em 50 anos e 4.7 em 1 ano. Estas recomendações devem ser interpretadas da seguinte forma: para que a estrutura tenha uma fiabilidade de 3.8 em 50 anos, tem de ter uma fiabilidade de 4.7 no primeiro ano. O valor chave é o valor de 3.8, que deve ser interpretado como a fiabilidade recomendada para a vida da estrutura.

Tabela 2.1: Valores de β_T (índice de fiabilidade-objectivo) recomendados pela NP EN 1990 (2009).

Estado limite	Período de referência 1 ano			Período de referência 50 anos		
	RC1	RC2	RC3	RC1	RC2	RC3
Último	4.2	4.7	5.2	3.3	3.8	4.3
Fadiga	-	-	-	-	1.5 a 3.8*	-
Utilização (irreversível)	-	2.9	-	-	1.5	-

* Depende do grau de inspecção, reparação e tolerância faces aos danos.

A Tabela 2.2 mostra as recomendações da Norma ISO 2394 (1998) que, à semelhança da EN 1990, está também vocacionada para projecto de estruturas novas. Os valores indicados referem-se ao período de vida útil da estrutura, embora a Norma não indique que período foi considerado. Os valores recomendados foram obtidos assumindo para as resistências distribuições Lognormais e Weibull, para as acções permanentes distribuição Normal e para as acções variáveis a distribuição Gumbel.

O *Probabilistic Model Code* (PMC) (JCSS, 2001a) recomenda os valores que se apresentam na Tabela 2.3, obtidos com base em análises custo-benefício. Relativamente às classes de consequência (baixas, moderadas e elevadas), o PMC dá as indicações que se descrevem de seguida. A primeira aplica-se a situações em que o risco de perdas humanas (dada a ocorrência de falha) é baixa e os prejuízos económicos são baixos — ρ menor que 2, com $\rho = (\text{custo de construção} + \text{custo em caso de falha}) / (\text{custo de construção})$. Tal é o caso por exemplo de edifícios agrícolas e silos. A segunda (consequências moderadas) aplica-se a situações com risco médio de perdas humanas ou prejuízos económicos consideráveis (ρ entre 2 e 5), como por exemplo edifícios de escritórios, industriais e residenciais. A última refere-se a situações com risco elevado de perdas de vidas humanas ou prejuízos económicos muito elevados (ρ entre 5 e 10), como por exemplo pontes, teatros e hospitais.

Tabela 2.2: Valores de β_T (índice de fiabilidade-objectivo) recomendados pela ISO 2394 (1998) — vida útil da estrutura.

Custo relativo de aumento da segurança	Consequências de falha			
	Baixas	Algumas	Moderadas	Elevadas
Alto	0	1.5 (*)	2.3	3.1 (**)
Moderado	1.3	2.3	3.1	3.8 (***)
Baixo	2.3	3.1	3.8	4.3

- (*) Para estados limites de utilização usar $\beta = 0$ para estados reversíveis e $\beta = 1.5$ para estados irreversíveis.
- (**) Para estados limites de fadiga usar $\beta = 2.3$ a $\beta = 3.1$, dependendo da possibilidade de inspecção.
- (***) Para estados limites últimos usar $\beta = 3.1, 3.8$ e 4.3 , dependendo do custo relativo do aumento de segurança.

Tabela 2.3: Valores de β_T (índice de fiabilidade-objectivo) recomendados pelo PMC (JCSS, 2001a) — Períodos de referência 1 ano e 50 anos.

Custo relativo do aumento de segurança	Estados limites últimos						Estados limites de utilização (*)	
	Consequências de falha							
	Baixas		Moderadas		Elevadas			
	1 ano	50 anos	1 ano	50 anos	1 ano	50 anos	1 ano	50 anos
Alto	3.1	1.7	3.3	2.0	3.7	2.6	1.3	-2.5
Moderado	3.7	2.6	4.2 (**)	3.2 (**)	4.4	3.5	1.7	-1.3
Baixo	4.2	3.2	4.4	3.5	4.7	3.8	2.3	0.2

(*) Irreversíveis

(**) Estes são os valores a usar mais frequentemente.

A Tabela 2.4 compara as recomendações das três fontes apresentadas acima. Uma vez que essas recomendações dizem respeito a estruturas novas e, para estas, o custo relativo do aumento de segurança pode ser considerado baixo, considerou-se, para efeitos comparativos, as recomendações da ISO e do PMC que correspondem a esta situação. Conforme se observa, as recomendações da EN 1990 e da ISO 2394 são muito idênticas, mas relativamente diferentes das recomendações do PMC. Em certa medida, essas diferenças não são de estranhar, atendendo ao grau de subjectividade implícito na classificação das consequências de falha em «baixas», «moderadas» e «elevadas».

Uma vez conhecido o índice de fiabilidade associado a um determinado período de referência, é relativamente simples convertê-lo para outro período de referência. Com efeito, designando o índice de fiabilidade referente a uma unidade de tempo (1 ano,

por exemplo) por β_1 e o índice de fiabilidade referente a n unidades de tempo por β_n , pode adoptar-se a seguinte relação (NP EN 1990, 2009):

$$\Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_1)]^n, \quad (2.16)$$

que permite obter β_n a partir de β_1 e vice-versa. Esta relação é válida dentro das hipóteses da Eq.(2.14), e obtém-se facilmente a partir desta. Com efeito, considerando que $p_f = \Phi(-\beta)$, a Eq.(2.14) transforma-se em $\Phi(-\beta_n) = 1 - [1 - \Phi(-\beta_1)]^n$. Notando que $\Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$, dada a simetria da FDP do modelo Normal, obtém-se imediatamente (2.16).

Tabela 2.4: Comparação de valores β_T recomendados por diferentes fontes. Estados limites últimos e período de referência igual à vida da estrutura.

Fonte	Consequências de falha		
	Baixas (RC1)	Moderadas (RC2)	Elevadas (RC3)
EN 1990	3.3	3.8	4.3
ISO 2394	3.1	3.8	4.3
PMC	3.2	3.5	3.8

2.10 Breve descrição dos métodos de fiabilidade

2.10.1 Métodos de nível I

Os métodos de nível I incluem o método das tensões admissíveis (ainda utilizado no dimensionamento de fundações) e o já referido método dos coeficientes parciais de segurança (Madsen *et al.*, 1986), que corresponde à considerada abordagem semi-probabilística, na qual a verificação da segurança em relação a um estado limite particular consiste em satisfazer a condição:

$$E_d \leq R_d, \quad (2.17)$$

onde E_d representa o valor de cálculo ou valor de dimensionamento da grandeza actuante e R_d o valor de cálculo da correspondente grandeza resistente. Como mencionando anteriormente, os valores de cálculo são obtidos dos valores característicos E_k e R_k afectando-os de apropriados coeficientes de segurança.

Para um estado limite genérico $M = g(X_1, \dots, X_n)$ cada variável básica X_i é então representada pelo respectivo valor de dimensionamento X_{id} . Assim, numa abordagem de nível I, que continua a ser a abordagem base dos eurocódigos, a verificação da segurança em relação a esse estado limite genérico consiste em garantir que:

$$g(X_{1d}, \dots, X_{nd}) \geq 0, \quad (2.18)$$

verificação esta que deve ser estendida a todos os estados limites relevantes. Recorde-se que as variáveis básicas X_i incluem: (1) acções e influências ambientais, (2) propriedades dos materiais, (3) quantidades geométricas e (4) variáveis descritivas da incerteza nos modelos de transformação. Como se disse acima, os valores de dimensionamento das variáveis básicas obtêm-se a partir dos valores característicos (ou outros valores representativos) multiplicando-os (caso das acções) ou dividindo-os (caso das propriedades dos materiais) pelos coeficientes parciais de segurança. Fazendo intervir estes coeficientes, a Eq.(2.18) toma a forma:

$$g(\gamma_{f1}\psi_1F_{k1}, \gamma_{f2}\psi_2F_{k2}, \dots, \frac{f_{k1}}{\gamma_{m1}}, \frac{f_{k2}}{\gamma_{m2}}, \dots) \geq 0 \quad (2.19)$$

onde:

- F_{ki} é o valor característico da acção i ;
- γ_{fi} é o factor parcial de segurança para a acção i ;
- ψ_i é o coeficiente de combinação da acção i (≤ 1);
- f_{ki} é o valor característico da resistência do material i ;
- γ_{mi} é o factor parcial de segurança para o material i ;

Em geral o valor de dimensionamento das quantidades geométricas coincide com o valor nominal constante nas peças desenhadas. Em relação às variáveis descritivas das incertezas nos modelos de transformação, não aparecem explicitamente na função estado limite visto que esta incerteza é normalmente contemplada nos coeficientes γ_f e γ_m .

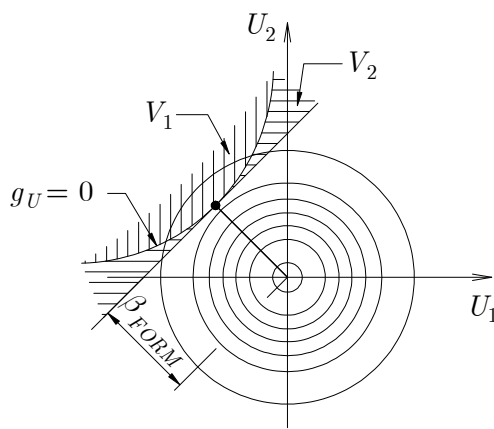
Naturalmente pretende-se que esta abordagem, francamente mais simples, conduza na medida do possível, a estruturas com fiabilidade idêntica à que se obteria se fossem empregues métodos probabilísticos. Este é o princípio base subjacente à calibração dos coeficientes parciais de segurança com métodos de fiabilidade. No entanto, a calibração também pode ser ditada por experiência acumulada, à base de um registo histórico bem sucedido de projecto e construção de estruturas. A NP EN 1990 (2009) refere explicitamente que este foi o critério principal utilizado na fixação dos coeficientes parciais aí recomendados. Pode então dizer-se que os coeficientes parciais de segurança consagrados nos eurocódigos estão principalmente calibrados de forma empírica.

O engenheiro projectista ao utilizar os coeficientes parciais especificados nos regulamentos confia que a estrutura resultante é suficientemente fiável, mas na realidade desconhece a sua fiabilidade e o risco de uma eventual falha estrutural (BRIME, 2001).

2.10.2 Métodos de nível II

Os métodos de nível II, que incluem o método FORM (*First Order Reliability Method*) e o método SORM (*Second Order Reliability Method*), baseiam-se na interpretação geométrica do índice de fiabilidade referida na secção 2.7. Recorde-se que quando uma função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$ é linear nas variáveis básicas e estas são normalmente distribuídas e independentes, o índice de fiabilidade $\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$ é exactamente igual à distância da origem do espaço normalizado à superfície de rotura $g_U = 0$, onde g_U representa a superfície de rotura transformada no espaço normalizado.

Para que a superfície $g_U = 0$ seja linear é necessário que $g = 0$ seja também linear e, simultaneamente, as variáveis básicas sejam normalmente distribuídas. Quando uma destas condições não é satisfeita, que aliás corresponde à situação típica, a distância da origem do espaço normalizado à superfície $g_U = 0$, aqui representada por β_{FORM} , já não coincide com o índice de fiabilidade β , mas pode ser encarada como uma aproximação a esse índice. O método FORM usa justamente β_{FORM} como aproximação de β , sendo por conseguinte um método aproximado. A Figura 2.9 ilustra o erro cometido pelo método FORM.



V_1 = probabilidade de falha exacta (volume calculado no domínio assinalado)

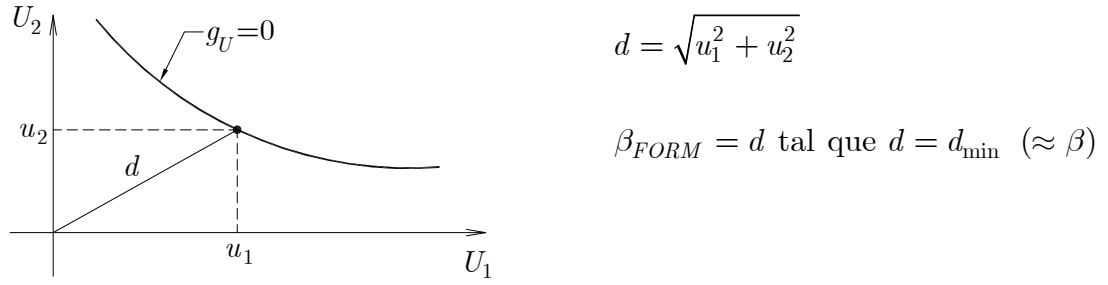
$V_1 + V_2$ = probabilidade fornecida pelo método FORM

V_2 = erro do método FORM

Figura 2.9: Erro cometido pelo método FORM.

O grau de linearidade da função estado limite é importante apenas na vizinhança do ponto de dimensionamento, porque é essa a zona que mais contribui para a probabilidade de falha, o que significa que a função estado limite até pode ser fortemente não linear e ainda assim a aproximação continuar a ser boa, bastando que a não linearidade ocorra numa zona afastada do ponto de dimensionamento.

Assim, a essência do método FORM consiste em encontrar o ponto u^* pertence à superfície $g_U = 0$ para o qual a distância à origem no espaço normalizado seja mínima (Melchers, 1999), como se esquematiza na Figura 2.10.

**Figura 2.10:** Essência do método FORM.

A determinação do índice β_{FORM} passa assim por um processo de otimização, neste caso a minimização de uma distância, podendo então ser formulado da seguinte forma:

$$\text{Determinar } \beta_{FORM} = \min \left\{ d = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \right\}, \text{ sujeito a } g_U(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

Resume-se de seguida os diferentes passos envolvidos na aplicação do método FORM. Considere-se a função estado limite $M = g(X)$, com $X = (X_1, \dots, X_n)$. O objectivo é estimar $p_f = P(g(X) < 0)$. Procede-se assim:

- 1) Transformam-se as variáveis X_i nas variáveis U_i , caracterizadas por serem independentes e terem distribuição normal reduzida, isto é, $U_i \sim N(0,1)$. O espaço das novas variáveis $U = (U_1, \dots, U_n)$ diz-se espaço normalizado. A superfície de rotura $g(X) = 0$ deverá ser então transformada na superfície $g_U(U) = 0$, referida ao espaço normalizado.
- 2) Determina-se o ponto da superfície $g_U(U) = 0$ mais próximo da origem, recorrendo a um processo de optimização. O ponto assim determinado designa-se por ponto de dimensionamento. A distância da origem a esse ponto define o índice β_{FORM} .
- 3) Finalmente estima-se a probabilidade de falha por $p_f \approx \Phi(-\beta_{FORM})$.

Naturalmente interessa examinar como se pode realizar a transformação referida no passo 1). Quando as variáveis X_i já são independentes e normalmente distribuídas, a transformação é linear, dada por:

$$U_i = (X_i - \mu_i) / \sigma_i \Leftrightarrow X_i = \mu_i + \sigma_i U_i, \quad (2.20)$$

onde μ_i e σ_i denotam, respectivamente, a média e desvio padrão da variável X_i .

Quando as variáveis X_i são independentes mas não são normalmente distribuídas, aplica-se a seguinte transformação: $U_i : \Phi(U_i) = F_{X_i}(X_i)$, ou seja,

$$U_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i)) \Leftrightarrow X_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(U_i)), \quad (2.21)$$

onde $F_{X_i}()$ representa a distribuição de probabilidade acumulada de X_i .

Quando as variáveis X_i são normais mas correlacionadas usa-se uma transformação baseada numa decomposição de Choleski da matriz de correlação das variáveis básicas. Quando as variáveis X_i são simultaneamente correlacionadas e não normais usa-se habitualmente a transformação de Rosenblat ou a transformação de Nataf, dependendo do modo como foi definida a dependência entre as variáveis básicas. Explicações pormenorizadas destas transformações podem ser encontradas nas referências Ditlevsen & Madsen (2005) e Madsen *et al.* (1986).

Uma vez obtido o índice de fiabilidade β_{FORM} , a verificação da segurança consiste em garantir que:

$$\beta_{FORM} \geq \beta_T, \quad (2.22)$$

onde β_T designa o índice de fiabilidade objectivo, especificado nas normas e regulamentos. Em alternativa pode-se usar a já mencionada condição:

$$p_f \leq p_{fT}, \quad (2.23)$$

onde $p_f = \Phi(-\beta_{FORM})$ e $p_{fT} = \Phi(-\beta_T)$.

Um conceito importante associado ao método FORM é o chamado *coeficiente de sensibilidade* FORM. Admita-se conhecido o ponto de dimensionamento $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$. Os correspondentes valores das variáveis básicas (X_1, \dots, X_n) , representados por $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, são então dados por $x_i^* = \mu_i + \sigma_i u_i^*$, ou mais genericamente por $x_i^* = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i^*))$, onde u_i^* é a componente i do vector cujo comprimento é β_{FORM} . Por conseguinte, pode escrever-se $u_i^* = -\alpha_i \beta_{FORM}^\dagger$. O coeficiente α_i , que se designa por coeficiente de sensibilidade da variável X_i , define-se então pela expressão:

$$\alpha_i = -\frac{u_i^*}{\beta_{FORM}}, \quad (2.24)$$

e satisfaz a propriedade $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$. Recorrendo a esta definição, os valores das variáveis básicas no ponto de dimensionamento são dadas por:

- 1) Variáveis normalmente distribuídas:

$$x_i^* = \mu_i + (-\alpha_i \beta_{FORM}) \sigma_i, \quad (2.25)$$

- 2) Variáveis com distribuição genérica $F_X(\cdot)$:

$$x_i^* = F_{X_i}^{-1}(\Phi(-\alpha_i \beta_{FORM})). \quad (2.26)$$

[†] A introdução do sinal “-” tem por finalidade tornar positivos os coeficientes de sensibilidade relativos a resistências e negativos os relativos a acções.

O coeficiente α_i mede a contribuição da incerteza da variável X_i na fiabilidade calculada. Por conseguinte, se se desejar investir na recolha de informação adicional com o objectivo de se obter uma estimativa mais exacta da fiabilidade, deve-se privilegiar as variáveis com maior coeficiente de sensibilidade, pois são essas as que mais afectam a fiabilidade estimada.

No caso de funções estado limite g lineares e variáveis básicas normais e independentes, pode-se demonstrar que o coeficiente de sensibilidade é dado por (Borges & Castanheta, 1985):

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_i \right)^2}}, \quad (2.27)$$

onde as derivadas parciais deverão ser calculadas no ponto de dimensionamento $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$. Observando a equação acima, constata-se que as variáveis com maior coeficiente de sensibilidade são as que têm simultaneamente maior desvio padrão e maior derivada parcial no ponto de dimensionamento. Em particular, uma variável pode possuir elevado desvio padrão e ainda assim possuir baixo coeficiente de sensibilidade — basta que, para o efeito, tenha baixa derivada parcial.

Calibração dos coeficientes de segurança usando o método FORM

Uma das aplicações importantes do método FORM consiste na calibração dos coeficientes parciais de segurança (Vrouwenvelder, 2008). Considere-se uma variável genérica X e represente-se o valor de dimensionamento desta variável por X_d . É lógico atribuir a X_d o valor dessa variável no ponto de dimensionamento, visto que corresponde ao ponto mais provável para o início de uma eventual rotura. Assim, de acordo com a formulação acima, X_d é dado por $X_d = F_X^{-1}(\Phi(-\alpha\beta))$, onde $F_X()$ representa a distribuição acumulada de X e α o coeficiente de sensibilidade dessa variável relativamente ao estado limite em apreço.

Se a variável X se referir a um efeito de acção, então o coeficiente parcial de segurança γ_f é dado por $\gamma_f = X_d / X_k$, onde X_k representa o valor característico de X , usualmente correspondente ao quantil $p = 0.95$, isto é, $X_k = F_X^{-1}(0.95)$. Assim, uma vez calculado o índice de fiabilidade β e o coeficiente de sensibilidade α_X da variável X (em relação a um determinado estado limite), o coeficiente parcial de segurança relativo à variável X é dado por:

$$\gamma_f = \frac{X_d}{X_k} = \frac{F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X\beta))}{F_X^{-1}(0.95)}. \quad (2.28)$$

Se a variável X se referir a uma resistência, então o coeficiente parcial de segurança γ_m é dado por $\gamma_m = X_k / X_d$, onde X_k representa o valor característico de X , usualmente correspondente ao quantil $p = 0.05$, isto é, $X_k = F_X^{-1}(0.05)$. Assim, uma vez calculado o coeficiente de sensibilidade α_X da variável X e o índice de fiabilidade β , o coeficiente parcial de segurança relativo à variável X é dado por:

$$\gamma_m = \frac{X_k}{X_d} = \frac{F_X^{-1}(0.05)}{F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X\beta))}. \quad (2.29)$$

Note-se que, em harmonia com a formulação acima, os coeficientes parciais de segurança de cada variável básica variam de estado limite para estado limite. Por outro lado, deve-se ter algum cuidado ao propor coeficientes de segurança baseados na formulação acima. Com efeito, é preciso não esquecer que os coeficientes de segurança propostos nos regulamentos reflectem também a incerteza nos modelos de transformação envolvidos nas funções estado limite e os coeficientes de segurança dados pela formulação acima reflectem apenas a incerteza da própria variável, expressa na função $F_X(\cdot)$. De qualquer forma, se se puder concluir que os modelos de transformação são, por si só, conservativos, então os coeficientes dados pelas equações acima garantem a fiabilidade desejada.

2.10.3 Métodos de nível III

Nos métodos de fiabilidade de nível III procura-se determinar a probabilidade de falha directamente a partir do integral que a define. Considere-se a função estado limite $M = g(X)$, onde $X = (X_1, \dots, X_n)$ designa o vector das variáveis básicas. O problema fundamental da fiabilidade estrutural consiste em avaliar o integral:

$$p_f = P(g(X) \leq 0) = \int_{X:g(X) \leq 0} f_X(X) dX, \quad (2.30)$$

onde $f_X(X)$ representa a densidade conjunta do vector X .

O integral acima pode ser avaliado por um dos seguintes métodos:

- 1) Integração analítica (possível apenas em poucos casos).
- 2) Integração numérica. Surgem dificuldades quando a dimensão n do espaço das variáveis básicas é superior a 5 (Melchers, 1999) ou quando a superfície de rotura $g(X) = 0$ possui geometria complexa.
- 3) Método de Monte Carlo (MC).

O método de MC é um método de simulação numérica muito simples e intuitivo que resolve as dificuldades mencionadas relativas à integração numérica. Além da sua simplicidade e de permitir resolver problemas complexos, o método de MC tem ainda a vantagem de permitir exercer controlo do erro associado à estimativa da

probabilidade de falha, algo que não é possível com os métodos de nível II (FORM e SORM).

Há, porém, uma dificuldade: a probabilidade p_f é em geral muito pequena, exigindo um grande número de simulações para se obter uma estimativa com um erro aceitável. Se em cada simulação for necessário avaliar a resposta da estrutura em modelos de elementos finitos, algo que pode consumir muito tempo se se tratarem de modelos não lineares, este método pode tornar-se impraticável. Existem técnicas de redução da variância que permitem uma redução muito significativa do número de simulações requeridas para se conseguir uma determinada precisão. Uma das mais utilizadas no domínio da segurança estrutural é a amostragem de importância (Teixeira, 2007).

Existem ainda outras técnicas de amostragem, tais como os métodos conhecidos como Hipercubo Latino e Amostragem Descritiva, que tendem a aumentar a eficiência do método de MC. Olsson *et al.* (2003) mostraram que é possível reduzir ainda mais o esforço computacional em problemas de fiabilidade estrutural juntando a técnica da amostragem de importância com o método do Hipercubo Latino.

Nesta subsecção analisa-se apenas a técnica da amostragem de importância. Antes, porém, é conveniente recordar em que consiste o método de MC básico, isto é, sem qualquer técnica de redução da variância.

Método de MC básico

A avaliação do integral (2.30) pelo método de MC básico estabelece-se formalmente do seguinte modo:

$$p_f = \int_{X:g(X) \leq 0} f_X(X) dX = \int_{\text{todo } X} I \cdot f_X(X) dX, \quad (2.31)$$

onde $I = I(g(X))$, designada *função indicadora*, é definida por:

$$I = \begin{cases} 0 & g(X) > 0 \\ 1 & g(X) \leq 0 \end{cases}, \quad (2.32)$$

que, por ser função de variável aleatória, é também variável aleatória.

Observando o integral (2.31) conclui-se que p_f é o valor esperado da variável I , isto é, $p_f = E(I)$. Ora, quando se dispõe de uma amostra aleatória (I_1, \dots, I_N) da variável I , uma boa estimativa para $E(I)$ é a média dessa amostra, dada por:

$$\hat{p}_f = \bar{I} = (1/N) \sum_{i=1}^N I_i. \quad (2.33)$$

Assim, o método MC consiste em gerar uma amostra da variável indicadora e estimar a probabilidade pela média dessa amostra. Em termos simples, o método de MC equivale a simular a função estado limite N vezes, contar o número de falhas ocorridas ($n_{g<0} = \sum_i I_i$) e estimar a probabilidade de falha pela frequência relativa do acontecimento $g < 0$, isto é, $\hat{p}_f = n_{g<0} / N$.

Como se disse, uma das vantagens do método de MC é permitir exercer controle no erro associado à estimativa. Com efeito, para ter uma ideia da precisão da estimativa $\hat{p}_f = \bar{I}$ pode-se avaliar o erro padrão (*standard error*), dado por:

$$se = \frac{s}{\sqrt{N}}, \quad (2.34)$$

onde s representa o desvio padrão da amostra (I_1, \dots, I_N) , dado por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I_i - \bar{I})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (I_i - \hat{p}_f)^2}. \quad (2.35)$$

O erro padrão é assim dado por:

$$se = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (I_i - \hat{p}_f)^2}. \quad (2.36)$$

Observe-se que, uma vez determinados \hat{p}_f e se , pode-se afirmar que a probabilidade do intervalo $\hat{p}_f \pm se$ conter o verdadeiro valor de p_f é de aproximadamente 68% e que a probabilidade do intervalo $\hat{p}_f \pm 1.96 se$ conter esse mesmo valor é de aproximadamente 95% (Montgomery & Runger, 2007). Qualquer um destes intervalos constitui uma medida da precisão da estimativa \hat{p}_f .

Em resumo, o método de MC básico segue o seguinte algoritmo:

- 1) Gera-se uma amostra de $X \sim F_X(X)$ de tamanho N , a saber, $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, $i = 1, \dots, N$.
- 2) Avalia-se $g_i = g(x^{(i)})$ e $I_i = I(g_i)$, $i = 1, \dots, N$.
- 3) A partir da amostra (I_1, \dots, I_N) obtida, determina-se $\hat{p}_f = (1/N) \sum_{i=1}^N I_i$.
- 4) Estima-se o erro padrão associado à estimativa \hat{p} , dado pela Eq. (2.36). Se o erro padrão for demasiado elevado, aumenta-se a dimensão N da amostra até obter uma estimativa \hat{p}_f com a precisão desejada.

Como referido, o método de MC básico é ineficiente em problemas de fiabilidade estrutural, caracterizados por probabilidades de falha muito pequenas. Para uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-5} significa que em média ocorrerá apenas uma falha em cada 100 000 simulações. A maior parte das simulações serão perdidas por corresponderem a estados de segurança, como ilustrado na Figura 2.11.

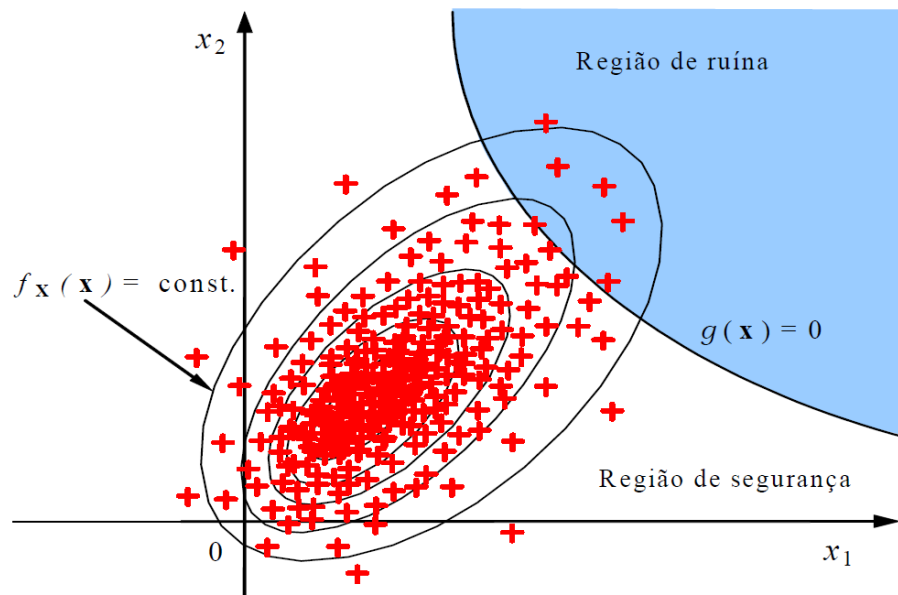


Figura 2.11: Ilustração do método de MC básico (Teixeira, 2007).

Método de MC com amostragem de importância.

O método de MC com amostragem de importância aplicado a problemas de fiabilidade estrutural consiste em gerar amostras em torno do ponto de dimensionamento, previamente determinado pelo método FORM. A amostra da função indicadora assim obtida será depois corrigida de forma a fornecer a probabilidade correcta (Figura 2.12).

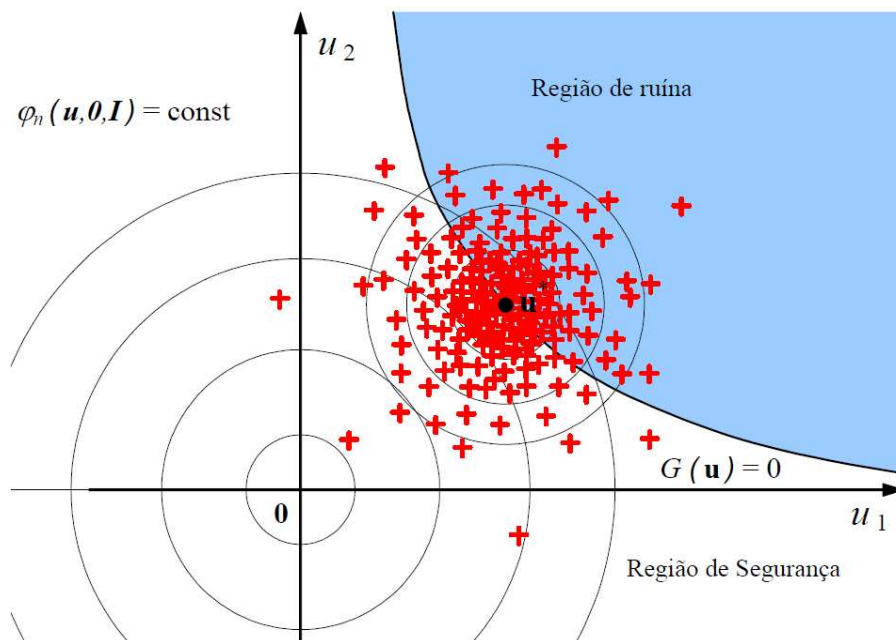


Figura 2.12: Ilustração do método de MC com amostragem de importância (Teixeira, 2007).

Formalmente, o método de MC com amostragem de importância estabelece-se do seguinte modo:

$$p_f = \int_{X:g(X) \leq 0} f_X(X) dX = \int_{\text{todo } X} I \cdot f_X(X) dX = \int_{\text{todo } X} \frac{I \cdot f_X(X)}{h(X)} h(X) dX, \quad (2.37)$$

onde $h(X)$, chamada *função de importância*, é uma função densidade de probabilidade destinada a gerar uma amostra de X centrada no ponto de dimensionamento.

O algoritmo do MC com amostragem de importância consiste em:

- 1) gerar uma amostra $X \sim h(X)$ de tamanho N , a saber:

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N;$$

- 2) avaliar $g_i = g(x^{(i)})$ e obter $I_i = I(g_i)$, $i = 1, \dots, N$;

$$3) \text{ obter } J_i = \frac{I_i \cdot f_X(x^{(i)})}{h(x^{(i)})};$$

- 4) com base na amostra (J_1, \dots, J_N) obtida, retornar $\hat{p}_f = (1 / N) \sum_{i=1}^N J_i$;

- 5) Estimar o erro padrão, dado por $se = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (J_i - \hat{p}_f)^2}$ e verificar se é aceitável. Se não for, aumenta-se a dimensão N da amostra.

Se se trabalhar no espaço normalizado, usa-se para função de importância uma multinormal centrada no ponto de dimensionamento $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$, isto é, $h(u) = N(u | u^*, 1)$.

O algoritmo consistem em:

- 1) gerar uma amostra $U \sim N(u | u^*, 1)$ de tamanho N , a saber:

$$u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}), \quad i = 1, \dots, N;$$

- 2) obter $x^{(i)} = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u^{(i)}))$, avaliar $g_i = g(x^{(i)})$ e obter $I_i = I(g_i)$;

$$3) \text{ obter } J_i = \frac{I_i \cdot f_U(u^{(i)})}{h(u^{(i)})} = \frac{I_i \cdot N(u^{(i)} | 0, 1)}{N(u^{(i)} | u^*, 1)};$$

- 4) com base na amostra (J_1, \dots, J_N) obtida, retornar $\hat{p}_f = (1 / N) \sum_{i=1}^N J_i$;

- 5) estimar o erro padrão, dado por $se = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (J_i - \hat{p}_f)^2}$ e verificar se é aceitável. Se não for, aumenta-se a dimensão N da amostra.

Este algoritmo permite uma redução muito significativa do número de simulações requeridas para um determinado erro padrão, que pode ser da ordem de 10 vezes, ou até superior.

2.10.4 Métodos de nível IV

Os chamados métodos de nível IV envolvem o emprego do conceito de risco (Melchers, 1999), entendido como o produto da probabilidade de ocorrência de um evento adverso (p_f) pelas consequências da ocorrência desse evento (C_f), isto é, $R = p_f \times C_f$. Existem outras definições mais gerais de risco (ISO 31000, 2009), mas esta é a mais comum no domínio da segurança estrutural. Observe-se que, de acordo com essa definição, o risco pode ser visto como o custo esperado associado à ocorrência do evento adverso em questão. Para se obter o custo total de uma estrutura, numa perspectiva de ciclo de vida, é necessário adicionar este custo ao custo inicial e ao custo de manutenção ao longo da vida da estrutura (Thoft-Christensen, 2006).

No domínio da segurança estrutural, podem-se formular vários problemas envolvendo o conceito de risco. Por exemplo, pode haver conveniência em verificar a segurança em relação à ocorrência de um estado limite (ou mais genericamente em relação a um cenário adverso), não por se comparar a probabilidade de ocorrência desse evento adverso com uma probabilidade previamente aceite como apropriada, mas por se comparar o risco desse evento adverso com o risco previamente aceite como máximo admissível. A condição de segurança, formulada em termos de risco, seria:

$$\text{Risco estimado } (= p_f C_f) < \text{Risco admissível}. \quad (2.38)$$

Se o risco estimado ultrapassar o risco admissível, há duas formas de o reduzir: aumentando a fiabilidade da estrutura ou implementando medidas susceptíveis de mitigar as consequências da ocorrência do evento adverso. Uma abordagem deste tipo só se justifica em estruturas de elevada importância, caracterizadas por conduzirem a consequências extremamente graves em caso de ocorrência desse evento adverso.

Outra aplicação do conceito de risco consiste na optimização da probabilidade de falha, p_f . A probabilidade de falha óptima (de um determinado estado limite) será a que corresponde a um custo generalizado (ou custo total) mínimo, definido por (Borges & Castanheta, 1985):

$$C_g(p_f) = C_i(p_f) + C_m(p_f) + p_f C_f, \quad (2.39)$$

onde C_i representa os custos iniciais (projecto e construção) ou os custos de reforço no caso de uma estrutura existente, C_m representa os custos de manutenção durante a vida da estrutura (incluindo custos de inspecção) e C_f representa os custos a suportar em caso de ocorrência desse estado limite. Observe-se que a última parcela da Eq. (2.39) representa o risco.

A fim de ilustrar o problema da determinação da fiabilidade óptima pela minimização do custo generalizado, considere-se um exemplo. Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma ponte existente, tendo-se concluído que a ponte não satisfaz a segurança em relação a um determinado estado limite. Admita-se que se pretende aumentar a fiabilidade da ponte em relação a esse estado limite (implementando alguma solução de reforço), mas de forma optimizada, isto é, o reforço a implementar deve ser tal que o respectivo custo, adicionado ao risco, seja mínimo. Seja C_r o custo de reforço e admita-se que esse custo pode ser expresso por uma função do tipo $C_r = a + b\beta$, em que a e b são constantes e β é o índice de fiabilidade relativo ao estado limite em apreço. Observe-se que b representa um custo marginal de segurança. Seja C_f o custo a suportar caso o estado limite seja atingido. Como visto acima, o risco é dado por $R = p_f C_f$, com $p_f = \Phi(-\beta)$. Assim, o custo generalizado, que se pretende minimizar, é dado por $C_g = C_r + R = a + b\beta + \Phi(-\beta)C_f$. O valor óptimo de β corresponde ao mínimo do custo generalizado e pode ser obtido derivando esta equação e igualando a zero (Ditlevsen & Madsen, 2005). Ora,

$$\frac{dC_g}{d\beta} = b - C_f \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2}{2}}. \quad (2.40)$$

Igualando então (2.40) a zero e resolvendo em ordem a β , obtém-se:

$$\beta_{opt} = \sqrt{2 \ln \left(\frac{C_f}{\sqrt{2\pi}b} \right)}. \quad (2.41)$$

Assim, uma vez conhecido o custo marginal de segurança b e o custo incorrido no caso do estado limite ser atingido, C_f , é possível determinar o índice de fiabilidade óptimo. Custos de falha C_f elevados fazem aumentar a fiabilidade óptima e custos marginais de segurança elevados fazem diminuí-la. A solução de reforço deve ser tal que conduza à fiabilidade optima.

Finalmente, num plano mais genérico, o conceito de risco pode ser empregue num problema de decisão formulado em termos de análise custo-benefício. O objectivo é maximizar a diferença entre o benefício e o custo, isto é, maximizar a função:

$$W(z) = B(z) - C_i(z) - C_m(z) - p_f(z)C_f, \quad (2.42)$$

onde:

- z – representa as variáveis de decisão / dimensionamento;
- B – representa os benefícios;
- C_i – representa os custos iniciais;
- C_m – representa os custos de manutenção (incluindo custos de inspecção);
- C_f – representa os custos associados à falha estrutural, no caso de ocorrer.

As avaliações de risco em estruturas e em outros domínios de engenharia civil têm tido em anos recentes desenvolvimentos significativos (JCSS, 2008). No entanto, não se fará referência adicional a este assunto por sair dos objectivos do presente trabalho.

2.11 Fiabilidade de sistemas

Como referido anteriormente, distinguem-se dois tipos de análise de fiabilidade: *análise ao nível do elemento* e *análise ao nível do sistema*. Recorde-se que a análise ao nível do elemento envolve a avaliação da probabilidade de violação de um único estado limite. Quando determinado modo de ruína envolve mais do que um estado limite, a análise da fiabilidade em relação a esse modo de ruína diz-se análise ao nível do sistema. Por exemplo, suponha-se que se deseja avaliar a probabilidade de determinada estrutura transformar-se num mecanismo e que, para esse efeito, é necessário que se formem duas rótulas plásticas. A cada rótula plástica corresponde um estado limite de flexão e a probabilidade procurada envolve assim a probabilidade de ocorrência simultânea de dois estados limites.

É importante notar que os níveis de fiabilidade recomendados pelas normas mencionadas na secção 2.9 referem-se a fiabilidade ao nível do elemento. Por outras palavras, a verificação da segurança segundo essas normas é feita estado limite a estado limite, partindo-se do princípio de que se a fiabilidade em relação a todos os estados limites relevantes for aceitável, então a estrutura, como um todo, possui fiabilidade aceitável.

Se se efectuasse uma verificação da segurança ao nível do sistema, a condição de segurança seria da forma:

$$p_{f,sys} \leq p_{fT,sys}, \quad (2.43)$$

onde $p_{f,sys}$ refere-se à probabilidade de ocorrência do modo de ruína em apreço (envolvendo normalmente alguma forma de colapso) e $p_{fT,sys}$ designa a probabilidade máxima admissível para esse modo de ruína.

Descrevem-se de seguida os princípios básicos da fiabilidade de sistemas. Suponha-se que uma eventual falha numa estrutura depende de apenas dois estados limites, $g_1(X)$ e $g_2(X)$. Pode acontecer uma entre duas situações possíveis:

- a) {falha estrutural, ou modo de ruína} $\Leftrightarrow \{g_1(X) < 0 \cup g_2(X) < 0\}$
- b) {falha estrutural, ou modo de ruína} $\Leftrightarrow \{g_1(X) < 0 \cap g_2(X) < 0\}$

Na primeira situação, a simples ocorrência dum estado limite determina a falha da estrutura e o sistema diz-se em série. Na segunda, a falha na estrutura ocorre se, e somente se, todos os estados limites forem violados e o sistema diz-se sistema paralelo (ou sistema redundante). Se a falha estrutural depender de mais do que dois estados limites, o sistema pode consistir numa combinação dos dois tipos básicos descritos e o sistema diz-se misto.

O cálculo da probabilidade de falha de sistemas envolve, por isso, a probabilidade da intersecção e reunião de eventos, constituindo assim uma aplicação directa da teoria elementar das probabilidades. Por exemplo, suponha-se que $P[g_1(X) < 0] = p_{f1}$ e $P[g_2(X) < 0] = p_{f2}$. Então as probabilidades de falha para cada um dos dois tipos básicos de sistema são dadas por:

- a) sistema série: $p_{f,sys} = P[g_1 < 0 \cup g_2 < 0] = p_{f1} + p_{f2} - P[g_1 < 0 | g_2 < 0] \times p_{f2}$
- b) sist. paralelo: $p_{f,sys} = P[g_1 < 0 \cap g_2 < 0] = P[g_1 < 0 | g_2 < 0] \times p_{f2}$

Se os acontecimentos $\{g_1 < 0\}$ e $\{g_2 < 0\}$ forem independentes (na área da segurança estrutural em geral não são, visto que existem variáveis básicas comuns nas diferentes funções estado limite), as probabilidade de falha são dadas por:

- a) sistema série: $p_{f,sys} = P[g_1 < 0 \cup g_2 < 0] = p_{f1} + p_{f2} - p_{f1} \times p_{f2}$
- b) sist. paralelo: $p_{f,sys} = P[g_1 < 0 \cap g_2 < 0] = p_{f1} \times p_{f2}$

que facilmente se podem generalizar para m estados limites:

- a) sistema série: $p_{f,sys} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_{fi})$
- b) sistema paralelo: $p_{f,sys} = \prod_{i=1}^m p_{fi}$

Observando cuidadosamente as fórmulas acima, constata-se que:

- a) sistema série: $p_{f,sys} > \max\{p_{f1}, \dots, p_{fm}\}$
- b) sistema paralelo: $p_{f,sys} < \min\{p_{f1}, \dots, p_{fm}\}$

Estas relações são válidas quer os estados limites sejam independentes quer sejam dependentes. A fiabilidade de sistemas é tratada com desenvolvimento em Ditlevsen & Madsen (2005) e Lemaire (2009).

2.12 Considerações finais

Os requisitos fundamentais para as estruturas, para os quais se espera que estas apresentem bom desempenho durante toda a sua vida útil, podem agrupar-se em quatro tipos fundamentais: (1) utilização, (2) segurança, (3) durabilidade e (4) robustez. Espera-se assim que as estruturas sejam robustas, duráveis, seguras e que não sofram danos susceptíveis de prejudicar a sua utilização. O desempenho das estruturas a esses requisitos deve ser conseguido de forma económica e com apropriados níveis de fiabilidade.

É claro que se tratam de requisitos gerais, pelo que a sua aplicação exige a definição de requisitos mais específicos, susceptíveis de serem quantificados e cujo cumprimento garanta a satisfação dos primeiros. Torna-se pois necessário identificar um conjunto de estados desfavoráveis susceptíveis de ocorrerem durante a vida da estrutura. Surge assim o conceito de estado limite. Os estados limites e as funções que lhes correspondem (funções estado limite) constituem critérios quantitativos para avaliar o desempenho das estruturas. O desempenho a cada um dos estados limites é considerado bom se a probabilidade de serem atingidos não exceder um valor previamente aceite como apropriado.

Alguns requisitos, porém, são especificados nos regulamentos, não sob a forma de estados limites, mas sob a forma de valores mínimos e máximos de certas variáveis, a respeitar na fase do projecto. Há assim dois modos distintos de verificação da satisfação dos requisitos gerais: através da especificação de critérios de desempenho (funções estado limite) e através da especificação de medidas prescritivas. A tendência actual é substituir cada vez mais as medidas prescritivas por critérios de desempenho, dando assim maior liberdade aos projectistas.

Relativamente ao primeiro modo de satisfação dos requisitos gerais (recurso a funções estado limite), descreveram-se as duas abordagens principais disponíveis: abordagem probabilística e abordagem semi-probabilística. Na abordagem semi-probabilística, que faz parte dos métodos de nível I, recorre-se aos chamados coeficientes de segurança, que procuram manter as resistências suficientemente afastadas das acções e assim garantir que a probabilidade de violação dos estados limites seja suficientemente baixa. No entanto, tal probabilidade não intervém

directamente na análise, pelo que a fiabilidade da estrutura (em projecto ou em avaliação) é desconhecida, embora se acredite que seja suficientemente baixa.

Na abordagem probabilística, recorrendo à teoria das probabilidades, procura-se estimar as probabilidades de violação dos diferentes estados limites. Tais probabilidades são comparadas com probabilidades previamente aceites como apropriadas. Deve-se reconhecer, porém, que até mesmo empregando este método, o verdadeiro valor da fiabilidade continua a ser desconhecido. Isso deve-se, por um lado, à presença de incertezas do tipo epistémico, e por outro, ao facto de se excluírem da análise erros humanos de natureza grave, que constituem aliás as causas principais dos colapsos estruturais (Akesson, 2008). No entanto, a abordagem probabilística é bastante mais potente que a abordagem baseada em coeficientes de segurança, pois permite modelar directamente as incertezas do problema, que poderão diferir de problema para problema.

As probabilidades de violação dos estados limites (probabilidades de falha) poderão ser avaliadas de forma aproximada recorrendo aos métodos FORM ou SORM (métodos de nível II), ou de forma “exacta” recorrendo a integração numérica ou a simulação numérica (métodos de nível III).

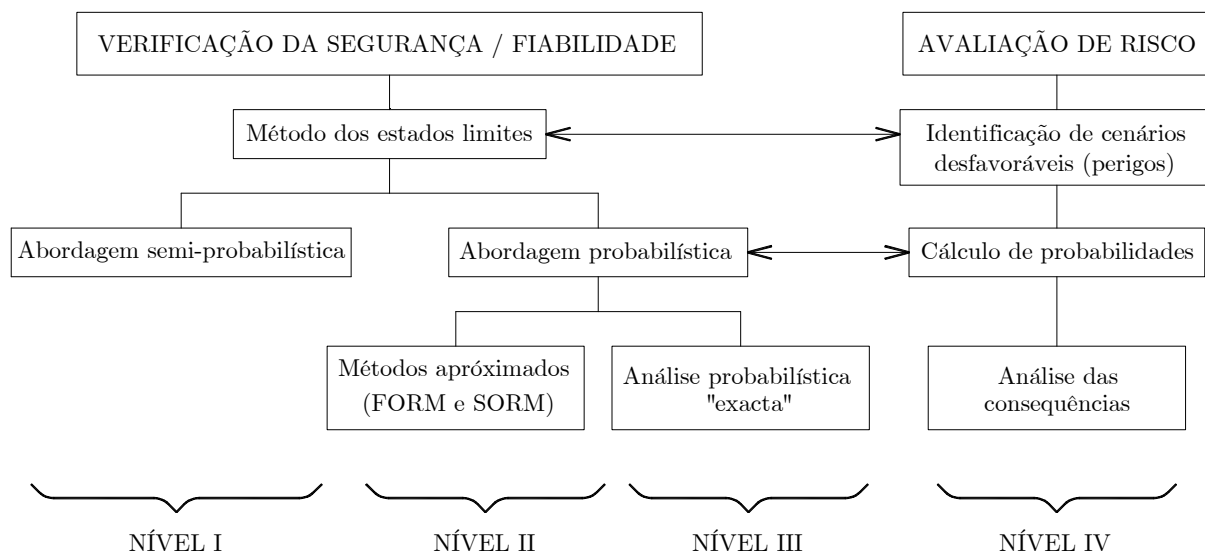


Figura 2.13: Formatos de verificação da segurança.

Quando o conceito de risco intervém no problema da segurança, ou seja, quando para além da probabilidade de violação de um determinado estado limite intervêm também as consequências de tal violação, o método utilizado é dito método de nível IV. A Figura 2.13 sintetiza os diferentes métodos, ou formatos de verificação da segurança, acabados de descrever.

Independentemente do método empregue, existem diferenças importantes entre verificar a segurança de uma ponte em projecto e avaliar a segurança de uma ponte existente. De facto, o problema da segurança estrutural reveste-se de particularidades próprias quando se passa da estrutura em projecto para a estrutura já construída. O próximo Capítulo trata dessas particularidades.

Capítulo 3

Avaliação da segurança de pontes existentes

3.1 Considerações iniciais

De acordo com a Norma ISO 13822 (2001), a avaliação de uma estrutura existente compreende um conjunto de actividades realizadas com o objectivo de estimar a fiabilidade da estrutura para uso futuro. Recorde-se que a fiabilidade de uma estrutura é uma medida probabilística da sua aptidão em cumprir certos requisitos durante um determinado intervalo de tempo. Entre esses, destacam-se os requisitos da utilização, da segurança e da durabilidade. A avaliação pode incidir em um ou mais destes requisitos. Assim, consoante os requisitos a avaliar, distinguem-se dois tipos fundamentais de avaliação de estruturas existentes (SAMARIS, 2006a):

1) Avaliação de condição

A avaliação de condição visa fundamentalmente o estado de deterioração da estrutura, incidindo assim sobre o requisito de durabilidade. Este tipo de avaliação (*condition assessment*) é feita principalmente por meio de inspecções visuais. Uma avaliação de condição permite também avaliar o desempenho em termos de utilização visto que os estados limites de utilização dizem respeito a situações normais de uso. Com efeito, se a ponte já estiver em serviço por tempo razoável, uma simples constatação visual pode ser suficientemente convincente no sentido de comprovar a sua aptidão ao requisito de utilização, dado que já foi sujeita às acções com probabilidade de ocorrência relativamente elevada (JCSS, 2001b), ditas acções de serviço. Assim, em avaliações de condição não se justifica, em princípio, recorrer a modelos numéricos.

2) Avaliação estrutural

A avaliação estrutural visa fundamentalmente o requisito de segurança (estados limites últimos). Ao contrário da avaliação de condição, não pode basear-se apenas em inspecções visuais, visto que diz respeito ao desempenho da estrutura face a acções excepcionais (Schneider, 2006), isto é, acções com muito baixa probabilidade de ocorrência (mas verosímeis). Assim, a avaliação estrutural requer normalmente o uso de modelos numéricos, eventualmente calibrados com base em ensaios de campo.

A presente dissertação trata fundamentalmente deste segundo tipo de avaliação, usualmente designada na língua inglesa por *structural safety assessment*, ou ainda *assessment of load carrying capacity*. Pode ser motivada, entre outras razões, por:

- 1) Existência de deterioração visível acentuada (corrosão, sinais de fadiga, fissuração, delaminação, deformação), originando dúvidas sobre a segurança da ponte.
- 2) Ocorrência de um evento extremo (colisão de um veículo contra um pilar, incêndio, sismo) de que resultou danos na estrutura. Coloca-se então a questão de avaliar até que ponto a segurança foi afectada.
- 3) Suspeitas sobre a existência de erros de projecto, erros de construção ou má qualidade dos materiais empregues.
- 4) Aumento de cargas (inclusão de uma nova faixa, recarga de betuminoso) e a consequente dúvida sobre a necessidade de reforçar a ponte.
- 5) Mudança de regulamentação com a consequente conveniência em verificar se a ponte satisfaz os critérios de segurança à luz da nova regulamentação.
- 6) Necessidade de conceder uma autorização para passagem de um transporte especial.

Neste Capítulo descreve-se sumariamente o estado da prática em diferentes países com maior desenvolvimento no domínio das avaliações estruturais de pontes existentes. Estabelece-se também o estado da arte, com ênfase nas recomendações de organizações internacionais. Discutem-se alguns aspectos relacionados com modelação pertinentes em avaliações estruturais, incluindo modelação de acções, modelação de resistências e modelação estrutural. Por fim, analisam-se alguns critérios de aceitação da fiabilidade especificamente para pontes existentes. Antes de se passar à discussão desses aspectos, julga-se oportuno chamar a atenção para as importantes diferenças entre projectar uma ponte nova e avaliar a segurança duma existente.

3.2 Dimensionamento *versus* avaliação

Existem diferenças importantes entre o dimensionamento de uma estrutura nova e a avaliação de uma estrutura existente. Enumera-se de seguida as principais diferenças:

- 1) Incrementar a fiabilidade de uma estrutura existente tem regra geral um custo bastante superior ao custo de um incremento idêntico na fiabilidade de uma estrutura ainda em projecto. Vrouwenvelder (2010) diz «*It is easier to add a reinforcement bar when the structure is in the drawing table than after completion*». De facto, um dimensionamento conservativo não resulta em geral num custo significativo, mas uma avaliação conservativa pode resultar em custos elevados, ou até mesmo desnecessários (SAMCO, 2006). Assim, uma postura conservadora, embora justificável no projecto de estruturas novas, pode não ser adequada na avaliação de uma estrutura existente.
- 2) Algumas das incertezas existentes na fase de projecto, como as relacionadas com as propriedades dos materiais, por exemplo, são susceptíveis de ser reduzidas na fase de avaliação por meio de uma campanha de testes, o que pode justificar uma redução dos coeficientes de segurança, mantendo o mesmo nível de fiabilidade do projecto inicial.
- 3) O tempo de vida útil de uma estrutura existente, designada *vida útil residual*, pode ser inferior ao tempo de vida útil de uma estrutura nova e isso deve repercutir-se, por exemplo, nos valores máximos das acções variáveis (Schneider, 2006). Por exemplo, se for atribuída uma vida útil residual de 5 anos a uma ponte existente, pode justificar-se adoptar valores característicos das sobrecargas inferiores aos preconizados na regulamentação para pontes novas, visto que estes estão calibrados para um período de exposição bastante superior.
- 4) Questões como transtornos para os utilizadores não se colocam em geral no projecto de pontes novas, mas são pertinentes em obras de reabilitação e/ou reforço.

Em vista destas diferenças, conclui-se que não é totalmente adequado realizar avaliações estruturais tendo por base regulamentos e normas concebidos para projecto de estruturas novas (ISO 13822, 2001). Há pois a necessidade de regulamentação específica para a avaliação da segurança de pontes existentes. Como vai ver-se na próxima secção, alguns países já dispõem de documentação vocacionada para a realização de avaliações estruturais.

3.3 Prática em diferentes países

3.3.1 Avaliação da condição

A maioria dos países da Europa estabeleceu no final dos anos 80, mas sobretudo durante os anos 90, um programa sistemático de inspecções periódicas às suas pontes com o objectivo de avaliar a sua condição e determinar as necessidades de trabalhos de manutenção e reparação (COST 345, 2004a).

O modo de executar tais inspecções está normalmente bem definido nos chamados manuais de inspecção, desenvolvidos sob a responsabilidade das entidades que administram as pontes (donos de obra). Tais programas de inspecção são em geral muito semelhantes de país para país. As diferenças principais residem fundamentalmente na frequência das inspecções e no critério para decidir quais as estruturas a incluir nos referidos programas, normalmente função do vão (BRIME, 2001). O vão acima do qual a estrutura é incluída no programa de inspecções varia entre dois e cinco metros, dependendo do país.

Em geral as inspecções são classificadas em quatro categorias (COST 345, 2004a):

1) Inspeção de rotina, ou inspeção superficial:

Inspeção visual a todas as partes de acesso fácil realizada por pessoal de manutenção, não se exigindo que tenham conhecimento especial de anomalias. As inspecções de rotina têm por objectivo a gestão de trabalhos de limpeza, manutenção e reparações menores. Qualquer situação que represente perigo para os utilizadores dever ser reportada hierarquicamente. A periodicidade é em geral anual, mas alguns países fazem-no de forma contínua.

2) Inspeção geral

Inspeção visual a todas as partes acessíveis por meios normais, realizada por técnicos que para o efeito receberam formação específica. A periodicidade varia entre 2 e 3 anos. Nem todos os países, como é o caso de Portugal, incluem este tipo de inspeção nos seus programas.

3) Inspeção principal

Inspeção visual minuciosa a todas as partes acessíveis, incluindo partes que requeiram equipamento especial de acesso, realizada por engenheiros qualificados. Identificam-se e registam-se de forma organizada e sistemática todos os danos e defeitos encontrados. O detalhe da informação registada deve permitir uma estimativa dos custos de reparação. Neste tipo de inspeção

podem incluir-se a realização de ensaios de campo. A periodicidade é em geral de 5 anos.

Alguns países prevêem a realização de inspecções principais em duas ocasiões particulares. Uma delas é feita imediatamente antes da abertura da ponte ao tráfego e é designada inspecção de recepção provisória da ponte. A outra, designada inspecção de recepção definitiva, é realizada no final do período de garantia.

Alguns países, nos quais se inclui Portugal, também executam inspecções subaquáticas periodicamente.

4) Inspeção especial

A inspeção especial é assim designada por não ser programada e visa normalmente examinar mais em pormenor um dano particular encontrado numa inspeção anterior, realizada a essa ou a outra obra semelhante. Podem incluir a realização de ensaios de durabilidade ou ensaios de carga.

Realizam-se também inspecções especiais no seguimento de danos provocados por um sismo, colisão, incêndio, ou outro evento extremo.

Realizam-se ainda inspecções especiais às pontes que beneficiarão de uma reparação ou reforço a curto prazo. Trata-se de uma inspeção profunda à estrutura, cujos resultados servirão de apoio ao projecto de reabilitação.

Constata-se que há, de um modo geral, uma preocupação em que os resultados das inspecções sejam objectivos e o menos possível dependentes do inspector. Nesse sentido, os manuais de inspeção referidos estabelecem normalmente critérios de classificação de danos bastante pormenorizados. Além disso, dispõem de catálogos de defeitos que ilustram cada tipo de defeito (através de fotografia), fazem uma breve descrição do defeito, referem as causas possíveis e dão indicações sobre metodologias de reparação.

A fim de facilitar a sistematização das inspecções e dos relatórios resultantes, as pontes são divididas em componentes, e os componentes em elementos, registando-se as diferentes deficiências encontradas componente a componente e elemento a elemento. Para além da localização de cada deficiência detectada, regista-se também a sua natureza, a intensidade e a extensão em que ocorre.

Os resultados das inspecções são por fim arquivados em sistemas informáticos, designados por *sistemas de gestão de obras de arte* (SGOA) (Branco & Brito, 2004). Alguns são do tipo comercial, outros foram desenvolvidos localmente ou especificamente encomendados pelas autoridades administrativas. Alguns funcionam

essencialmente como bases de dados, outros contêm ferramentas avançadas de apoio à decisão, incluindo modelos de deterioração e algoritmos que permitem a gestão optimizada de fundos de manutenção. A maioria dos SGOA que implementa modelos de deterioração usa métodos baseados em cadeias de Markov, onde as matrizes de probabilidades de transição (entre índices de condição sucessivos) resultaram do tratamento estatístico do estado de condição de um número significativo de pontes (Casas, 2006).

3.3.2 Avaliação estrutural

Enquanto a maioria dos países da Europa possui um sistema de avaliação de condição apoiado em inspecções periódicas com um grau de desenvolvimento bastante razoável, o mesmo não acontece com as avaliações estruturais. Com efeito, a maioria dos países da Europa não dispõe de regulamentos, normas, ou outro tipo de documentação oficial, especialmente elaborada para avaliação da segurança de pontes existentes (do ponto de vista dos estados limites últimos), de modo que estas são executadas normalmente tendo por base as normas e regulamentos para dimensionamento (SAMARIS, 2006a).

No entanto, alguns países já dispõem de algum tipo de orientação específica para servir de apoio às avaliações estruturais. O projecto SAMARIS (2006a) fez uma pesquisa da prática em alguns países da Europa e América com avanços significativos neste domínio. Jacinto *et al.* (2009) faz também uma breve descrição dos princípios encontrados na documentação disponível nesses países. Segue um breve resumo desses princípios.

Estados Unidos

De acordo com SAMARIS (2006a), os EUA fazem uma distinção clara entre dimensionamento de pontes novas e avaliação da segurança de pontes existentes. O dimensionamento é feito com base na Norma AASHTO LRFD e a avaliação é feita com base na Norma AASHTO LRFR*. Com o objectivo de avaliar a segurança de uma ponte existente, este manual prevê três métodos possíveis.

O primeiro, conhecido como o método LRFR (*Load and Resistance Factor Rating*) é semelhante ao método dos coeficientes parciais de segurança usado na Europa. Os factores parciais aí especificados foram calibrados com base num índice de fiabilidade $\beta = 2.5$, valor este que é substancialmente mais baixo do adoptado no dimensionamento, que é de $\beta = 3.50$. A justificação desta redução está relacionada

* A versão mais recente desta Norma data de 2010 e intitula-se *Manual on Bridge Evaluation, 2nd edition*.

com considerações de natureza económica e com o facto do período de exposição ser muito mais pequeno (período entre avaliações de 2 a 5 anos). Por outro lado, os factores parciais podem ser ajustados em função do volume de tráfego, redundância da estrutura, facilidade de inspecção e estado de deterioração.

No segundo método, a avaliação é efectuada com base em ensaios de carga, distinguindo o manual dois tipos de ensaio: o primeiro, chamado *ensaio de diagnóstico*, destina-se a avaliar o comportamento da estrutura face a uma carga previamente fixa; o segundo, designado por *prova de carga*, destina-se a determinar a carga máxima compatível com o funcionamento em regime elástico-linear que a ponte é capaz de suportar.

O terceiro método consiste numa análise de fiabilidade, a usar especialmente nos seguintes casos:

- pontes com sobrecargas significativamente diferentes das previstas no manual;
- pontes com propriedades de materiais ou níveis de deterioração significativamente diferentes dos previstos;
- pontes com importância económica bastante diferente do considerado no manual;
- pontes nas quais devam ser consideradas em simultâneo vários perigos (vento, neve, sismo, etc.);
- pontes que pertençam a um grupo ao qual esteja a ser aplicado um sistema de gestão da segurança baseado em risco.

Canadá

O regulamento canadiano para projecto de pontes (CAN/CSA-S6-00, 2000) dispõe de uma secção (secção 14) destinada especificamente à avaliação da segurança de pontes existentes, em particular a determinação da sua capacidade de carga actual (*load carrying capacity*). O comentário a esse regulamento refere explicitamente «*The cost of upgrading or replacing a bridge may be great. Section 14 offers a method of evaluation by setting safety levels that are consistent and appropriate for the bridge or bridge component being assessed. The intention is to avoid some of the conservatism that, in the interest of simplicity, may have been incorporated into the design provision*» (CAN/CSA-S6-00b, 2000). A referida secção fixa os coeficientes parciais de segurança a usar especificamente em avaliações estruturais, diferentes dos coeficientes especificados para dimensionamento.

Estes coeficientes foram calibrados com base nos índices de fiabilidade que também são especificados no regulamento e que se reproduzem na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Índices de fiabilidade-alvo para pontes existentes especificados no regulamento canadiano. Período de referência 1 ano.

Comportamento do sistema	Comportamento do elemento	Níveis de inspecção		
		INSP1	INSP2	INSP3
S1	E1	3.50	3.25	3.25
	E2	3.25	3.00	2.75
	E3	3.00	2.75	2.50
S2	E1	3.25	3.00	3.00
	E2	3.00	2.75	2.50
	E3	2.75	2.50	2.25
S3	E1	3.00	2.75	2.75
	E2	2.75	2.50	2.25
	E3	2.50	2.25	2.00

Os índices de fiabilidade especificados dependem dos 3 factores seguintes:

1) Comportamento do sistema

- Categoria S1, onde a rotura do elemento em estudo conduz ao colapso da estrutura, como por exemplo a rotura de uma viga simplesmente apoiada.
- Categoria S2, onde a rotura do elemento em estudo provavelmente não conduz ao colapso da estrutura, como por exemplo em vigas com continuidade ou tabuleiros vigados com múltiplas vigas.
- Categoria S3, onde a rotura do elemento conduz apenas a uma rotura local, como por exemplo lajes de tabuleiros vigados.

2) Comportamento do elemento

- Categoria E1, onde o elemento em estudo é sujeito a uma repentina perda de capacidade com pouco ou nenhum aviso. Isto pode incluir rotura por instabilidade, rotura por esforço transversal ou torção sem armadura mínima e rotura por compressão.
- Categoria E2, onde o elemento em estudo é sujeito a rotura repentina com pouco ou nenhum aviso, mas com uma resistência residual pós-rotura, como por exemplo rotura por esforço transversal em elementos com armadura mínima de esforço transversal.
- Categoria E3, onde o elemento em consideração é sujeito a rotura com aviso (rotura gradual), como, por exemplo, rotura dúctil por flexão.

3) Nível de inspecção

- Nível INSP1, onde o elemento não é acessível.

- Nível INSP2, onde a inspecção satisfaz o avaliador, com os resultados de cada inspecção registados e disponíveis ao avaliador.
- Nível INSP3, onde a inspecção de elementos críticos ou não-regulamentares foi levada a cabo pelo avaliador e a avaliação têm em conta toda a informação obtida durante a inspecção.

Observa-se assim uma diferenciação da fiabilidade bastante pormenorizada. Os valores dos índices de fiabilidade preconizados variam entre 3.50 e 2.00. Neste respeito, é interessante notar que a Norma canadiana refere ainda que para estruturas susceptíveis de afectarem a vida de pessoas sob a ponte ou próximas dela, ou estruturas essenciais à economia local ou necessárias ao movimento de veículos de emergência, o valor de β indicado na tabela deve ser incrementado num mínimo de 0.25.

O regulamento canadiano prevê ainda que, sempre que existirem dúvidas sobre se o modelo analítico traduz ou não adequadamente o comportamento actual da ponte, a avaliação da capacidade de carga possa ser efectuada recorrendo a ensaios de carga, estáticos ou dinâmicos. No entanto, estabelece que nenhum ensaio de carga deve ser efectuado sem uma avaliação em modelo analítico.

Dinamarca

A Dinamarca possui um documento-guia (Vejdirektoratet, 2004) bastante completo relativo aos procedimentos a adoptar na avaliação da capacidade de carga de pontes existentes com base em metodologias probabilísticas. Esse manual foi preparado porque se percebeu que frequentemente era possível atribuir uma capacidade de carga superior e mais realista a uma ponte existente recorrendo a métodos probabilísticos (ou métodos de fiabilidade), tendo-se evitado em muitos casos obras de reforço, com poupanças financeiras significativas (Enevoldsen, 2009).

De acordo com esse documento-guia, a avaliação deve começar por uma análise determinística tradicional. Se a capacidade de carga obtida por essa via for inferior à requerida para a ponte em avaliação (função do tipo de itinerário em que se insere), então deve-se efectuar uma avaliação probabilística da capacidade de carga antes de tomar qualquer decisão referente a reforço ou substituição da estrutura. A análise probabilística deve incidir sobre os estados limites críticos identificados pela análise determinística efectuada previamente.

A Tabela 3.2 apresenta os valores do índice de fiabilidade-alvo especificados na Dinamarca. Os valores referem-se a estados limites últimos e probabilidades de falha anuais.

Tabela 3.2: Índices de fiabilidade-alvo especificados na Dinamarca para estados limites últimos. Período de referência 1 ano.

Tipo de rotura	β_T	p_f
Rotura com aviso e resistência residual	4.26	10^{-5}
Rotura com aviso mas sem resistência residual	4.75	10^{-6}
Rotura sem aviso	5.2	10^{-7}

Muito resumidamente, o documento-guia dinamarquês delinea o seguinte procedimento:

- 1) Definição da classe da ponte em termos das sobrecargas que se espera que suporte.
- 2) Determinação dos estados limites críticos por meio de uma análise determinística.
- 3) Escolha do índice de fiabilidade-alvo β_T pretendido (Tabela 3.2).
- 4) Caracterização probabilística de todas as variáveis intervenientes nos estados limites críticos.
- 5) Cálculo do índice de fiabilidade β e comparação com β_T .
- 6) Ajuste da classe da ponte de forma iterativa até que $\beta \approx \beta_T$.

O documento contém orientações para a caracterização probabilística das diferentes variáveis intervenientes, incluindo acções e parâmetros de resistência (betão, armaduras passivas e armaduras de pré-esforço). Relativamente aos modelos probabilísticos das sobrecargas e para efeitos de extrapolação (determinação da distribuição de máximos a partir da distribuição inicial), o documento adopta modelos baseados em processos de Poisson.

Reino Unido

A *Highways Agency* do Reino Unido editou um conjunto de normas que constituem o *Design Manual for Roads and Bridges*. O volume 3 deste manual trata especificamente da avaliação de pontes existentes. Uma das normas do referido manual, a Norma BD 21/01 (2001), estabelece os procedimentos a adoptar para a determinação da sobrecarga rodoviária que uma ponte pode suportar com uma probabilidade razoável de que não sofrerá danos sérios susceptíveis de pôr em perigo pessoas e bens. A Norma preconiza que a avaliação da capacidade de carga seja feita pelo método dos coeficientes parciais de segurança em associação com os estados limites últimos. Para esse efeito, especifica os coeficientes parciais de segurança a usar (diferentes dos usados para estruturas novas) e dá indicações para a quantificação quer das acções quer dos parâmetros de resistência a usar no processo de avaliação.

Relativamente aos esforços resistentes, a Norma estabelece que eventual deterioração existente deve ser considerada multiplicando esses esforços por um factor inferior à unidade. A especificação desse factor, porém, é da responsabilidade do avaliador, que para o efeito deverá basear-se em juízos criteriosos (*engineering judgement*). A Norma prevê ainda que se possam realizar ensaios de carga, mas, se forem realizados, serão sempre complementares aos modelos numéricos, nunca os podendo substituir.

Refere-se ainda a Norma BA 54/94 (1994), que descreve os procedimentos gerais a adoptar em tais ensaios e que poderão ser realizados sempre que se suspeite que a capacidade real de carga seja superior à capacidade predita pelos modelos numéricos. Por essa razão, os ensaios têm por objectivo principal avaliar possíveis reservas de segurança não contabilizadas nos modelos de análise.

Se a ponte não puder suportar as cargas especificadas na Norma, uma das medidas possíveis consiste em impor restrições ao tráfego, restrições essas que poderão incidir ao nível da configuração das faixas de rodagem ou limitação dos pesos dos veículos circulantes.

República Checa

A República Checa dispõe de uma Norma específica que trata da capacidade de carga de pontes existentes — a Norma CSN 73 6220, citada em SAMARIS (2006a). Esta Norma serve de base a um sistema de classificação das pontes em termos da sua capacidade de carga, cuja determinação deve levar em conta o estado de deterioração actual da ponte. A capacidade de carga actual é obtida multiplicando a capacidade sem deterioração por um coeficiente inferior à unidade, função da condição actual. Tal coeficiente possui uma validade máxima de dois anos. Este país dispõe ainda duma Norma contendo disposições relativas à execução de ensaios de carga.

Outros países, tais como a Suíça, Noruega e Eslovénia dispõem também de alguma documentação relativa a avaliações estruturais. No entanto, um número significativo de países, incluindo França, Alemanha, Itália, Polónia, Espanha e Portugal, apesar de possuírem um parque de pontes significativo, não dispõem de documentação oficial específica que regulamente ou oriente as avaliações estruturais, de modo que estas são executadas tendo por base as normas e regulamentos para dimensionamento (SAMARIS, 2006a).

3.4 Recomendações de organizações internacionais

Nesta secção faz-se uma breve revisão das recomendações gerais de organizações internacionais relativas às avaliações estruturais. Em particular revêem-se as

recomendações da *International Organization for Standardization* (ISO) e do *Joint Committee on Structural Safety* (JCSS), bem como recomendações resultantes de projectos de investigação desenvolvidos na Europa.

A Norma ISO 13822 (2001) delineia o seguinte procedimento geral para uma avaliação estrutural:

1) Especificação clara dos objectivos da avaliação

A especificação dos objectivos da avaliação resulta de forma natural das razões que motivaram a avaliação. Nesta fase deve-se também estabelecer o período de vida residual previsto, bem como os níveis de fiabilidade pretendidos.

2) Especificação de cenários

Os cenários constituem a base da avaliação estrutural. Correspondem a situações críticas (mudanças na condição da estrutura e/ou acções) susceptíveis de porem em causa a segurança da estrutura e das pessoas. Cada cenário é caracterizado por um processo dominante (acção ou outra influência) e por processos acompanhantes (outras acções ou outras influências).

3) Avaliação preliminar

Na avaliação preliminar estudam-se os documentos e outras evidências disponíveis. Procede-se a uma inspecção preliminar à estrutura e fazem-se verificações sumárias. Fazem-se recomendações para a avaliação detalhada subsequente, podendo ainda, nesta fase, tomar-se decisões imediatas.

4) Avaliação detalhada

A avaliação detalhada inclui estudo pormenorizado de documentação; inspecção detalhada, incluindo execução de ensaios; determinação de acções; análise estrutural e verificação da fiabilidade.

5) Resultados da avaliação

Como resultado da avaliação é elaborado um relatório, que inclui recomendações, função dos objectivos estabelecidos no início e das conclusões tiradas.

6) Repetir a sequência a partir do ponto 4, se necessário

O documento *Probabilistic Assessment of Existing Structures* (JCSS, 2001b) constitui outra publicação de referência na área das avaliações estruturais, o qual recomenda uma abordagem em três fases, como esquematizado na Figura 3.1. Conforme mostrado na Figura, cada uma das três fases começa com um contrato entre o dono de obra e o consultor e termina com um relatório.

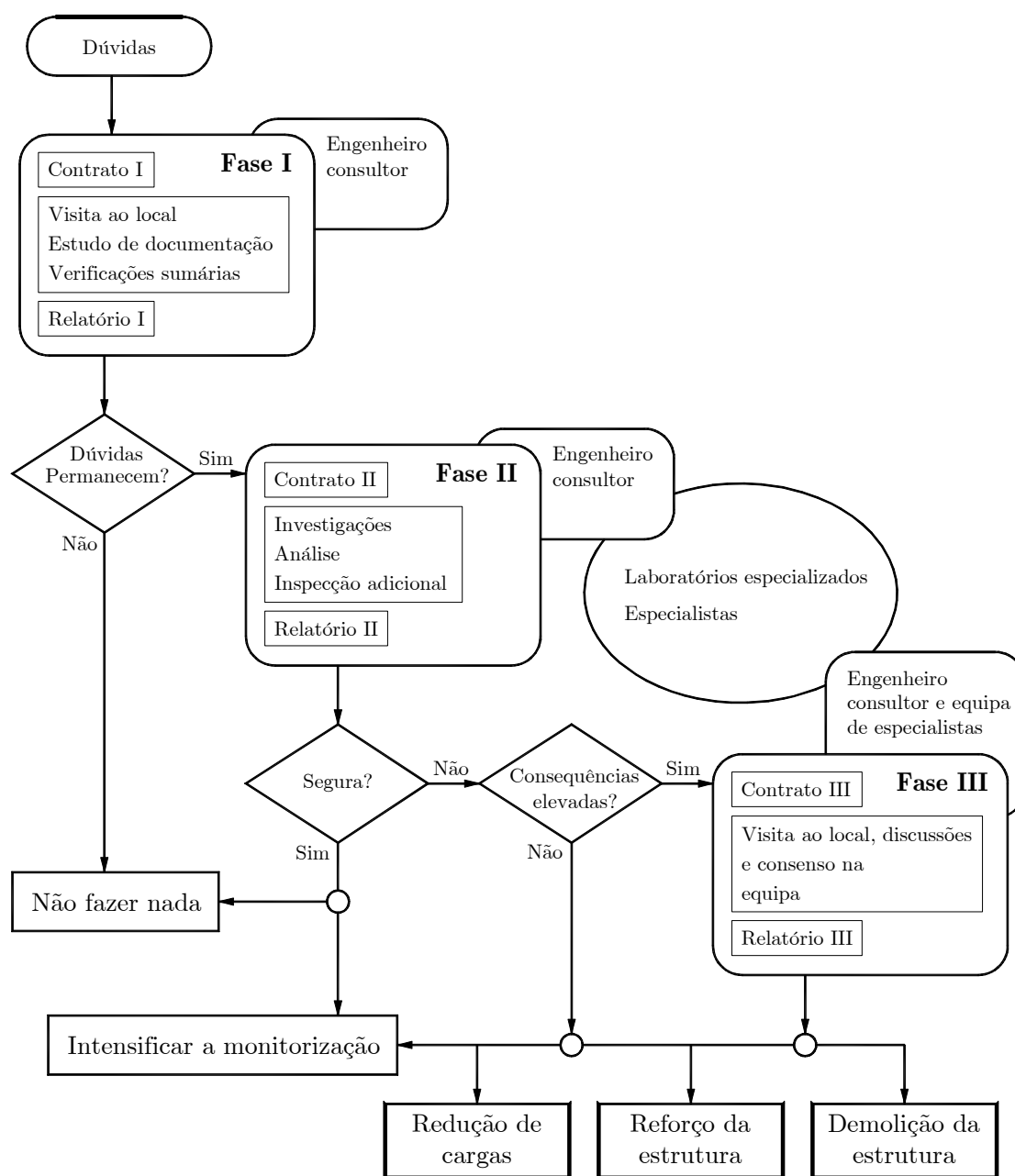


Figura 3.1: Abordagem de três fases recomendado pelo JCSS (2001b).

O objectivo da fase I é realizar uma avaliação preliminar a fim de confirmar ou remover as dúvidas iniciais. Começa-se por uma visita ao local e por uma revisão de documentação relevante existente (projecto e regulamentos que lhe serviram de base, registos de obra, inspecções anteriores, entre outros). É feita uma inspecção detalhada, procurando-se determinar possíveis cenários desfavoráveis para a estrutura. A verificação da segurança é feita com base em modelos simples.

Se as dúvidas iniciais permanecerem, passa-se à fase II, na qual se procede a uma investigação cuidadosa, incluindo realização de uma campanha de ensaios de campo, função do problema em análise. É feita uma análise refinada da estrutura,

eventualmente levando em conta o comportamento não linear e a redundância da estrutura. A verificação da segurança é feita recorrendo a ferramentas de fiabilidade. As informações colhidas dos ensaios realizados deverão ser usadas para actualizar os modelos probabilísticos, recorrendo, por exemplo, a metodologias Bayesianas.

Se no final da fase II se concluir que a estrutura não satisfaz os critérios de segurança, as decisões a tomar poderão incluir a intensificação da monitorização, a redução das sobrecargas, o reforço da estrutura ou ainda, como decisão mais drástica, a demolição da estrutura e sua substituição. No entanto, se a estrutura for de elevada importância (económica, patrimonial ou outra) deve passar-se à fase III antes de se tomar as decisões finais. A fase III consiste na constituição de uma equipa de vários especialistas de diferentes áreas de sensibilidade. Após um consenso entre os diferentes especialistas tomam-se as decisões finais.

Nas últimas duas décadas foram desenvolvidos vários projectos de investigação financiados pela Comissão Europeia, dedicados ao problema do estado de conservação e segurança de pontes existentes. Entre esses projectos, destaca-se o projecto BRIME (2001), a acção COST 345 (2001a e 2001b) e o projecto SAMARIS (2006a e 2006b).

As conclusões destes projectos convergem numa avaliação estrutural em cinco níveis, o nível 1 correspondendo ao nível mais simples e o nível 5 correspondendo ao nível mais sofisticado. A Tabela 3.3 resume as características principais de cada nível, conforme proposto no projecto BRIME (2001):

Tabela 3.3: Esquema geral dos níveis de verificação da segurança propostos no projecto BRIME (2001).

Nível	Modelos de resistência e acções	Modelos de cálculo	Formato de verificação da segurança
1	Como definido nos regulamentos em vigor.	Modelos simples. Regime elástico linear.	Método dos factores
2			parciais de segurança, com os coeficientes iguais aos do dimensionamento.
3	Modelos de acções e resistência a partir de ensaios.	Modelos refinados. Pode- se redistribuir esforços, dentro dos limites da	Modificação dos
4		ductilidade da estrutura.	coeficientes de segurança.
5	Modelos probabilísticos para todas as variáveis.		Análise puramente probabilística.

O nível 1 é o mais simples. Neste nível usam-se os modelos de resistência e acções previstos nos regulamentos ou normas em vigor no momento da avaliação. Se existirem normas específicas para estruturas existentes deverão ser tidas em conta. Os modelos de cálculo são simples, e em geral admite-se comportamento elástico linear dos materiais. O critério de verificação baseia-se no método dos coeficientes parciais, utilizando-se os valores especificados nesses regulamentos ou normas.

No nível 2 mantêm-se os critérios, mas os modelos de cálculo deverão ser mais rigorosos. Por exemplo, podem utilizar-se modelos de elementos finitos (se efectivamente introduzirem melhoria) e análises não lineares (física ou geométrica). Se forem efectuadas redistribuições de esforços deve assegurar-se que a capacidade de deformação da estrutura (ductilidade) é compatível. Ainda no nível 2 admite-se a possibilidade de usar valores característicos de resistências calculados a partir dos registos de obra da ponte em avaliação.

No nível 3 recorre-se a ensaios de campo com o objectivo de adaptar os modelos de resistência e acções à realidade específica da estrutura em avaliação. Se forem efectuados ensaios de carga, os resultados também poderão ser usados para calibrar o modelo de cálculo. Porém, os critérios de verificação da segurança continuam a basear-se no método dos coeficientes parciais de segurança.

O nível 4 caracteriza-se pela possibilidade de se modificar os coeficientes parciais e segurança com base nos resultados de ensaios entretanto efectuados. Esta modificação deve basear-se em técnicas de calibração, as quais, por sua vez, têm por base métodos de fiabilidade bem estabelecidos (veja-se por exemplo Thoft-Christensen & Baker, 1982). Os coeficientes parciais de segurança são calibrados em função da fiabilidade-objectivo pretendida para cada estado limite.

Finalmente, o nível 5 corresponde a uma análise totalmente probabilística, calculando explicitamente a fiabilidade da estrutura, a comparar com a fiabilidade-objectivo. As variáveis intervenientes são descritas por distribuições de probabilidade, cujos modelos deverão ser criteriosamente definidos já que têm forte influência no resultado final (Casas, 2006). Tais modelos poderão ser obtidos de:

- a) Bibliografia especializada: podem seguir-se recomendações de bibliografia especializada, por exemplo, os documentos JCSS (2001a), Melchers (1999) e Madsen *et al.* (1986).
- b) Tratamento estatístico de dados experimentais existentes ou a obter: as ferramentas estatísticas, incluindo testes de ajuste de distribuições a histogramas, estão bem estabelecidas.

- c) Juízos criteriosos: em muitos casos, quer por falta de dados estatísticos, quer por desconhecimento do fenómeno físico em estudo, esta é a única via para o estabelecimento de modelos probabilísticos. Opiniões de especialistas, embora naturalmente subjectivas, certamente são valiosas.

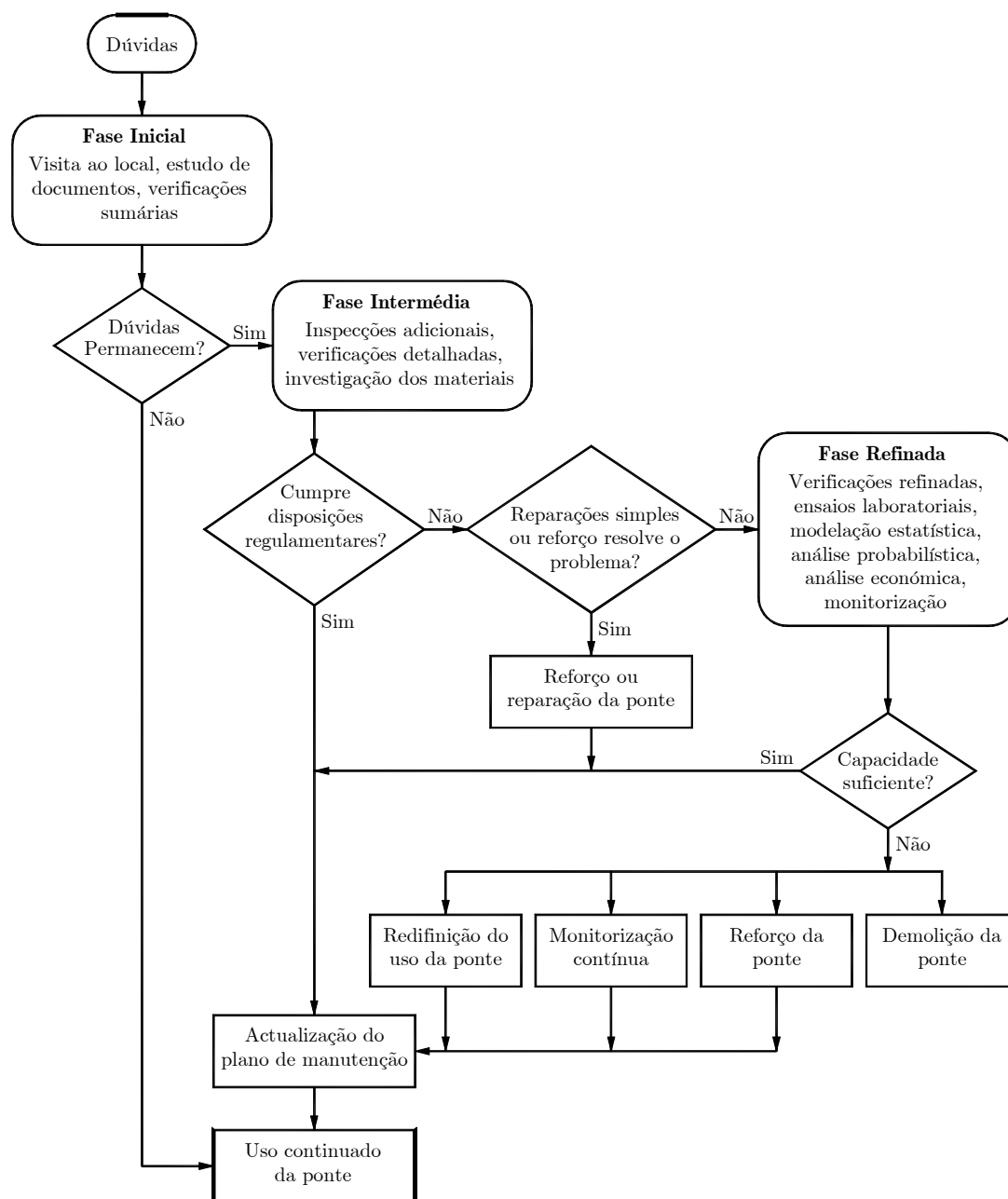


Figura 3.2: Procedimento recomendado no projecto SUSTAINABLE BRIDGES (Casas *et al.*, 2008).

Relativamente a projectos de investigação financiados pela Comissão Europeia, refere-se ainda o projecto SUSTAINABLE BRIDGES (2007a, 2007b, 2007c e 2007d) dedicado especificamente às pontes ferroviárias. Os autores deste projecto recomendam o procedimento que se esquematiza na Figura 3.2, que apresenta

algumas semelhanças com o procedimento proposto pelo JCSS, nomeadamente a subdivisão da avaliação em três fases. Existem contudo algumas diferenças. Por exemplo, o projecto SUSTAINABLE BRIDGES propõe que se passe à fase 3 em todos os casos para os quais o problema de segurança não possa ser resolvido com medidas simples, enquanto que o JCSS reserva a fase 3 apenas para as pontes com elevado valor económico ou patrimonial. Outra diferença reside nos formatos de segurança empregues nas fases 2 e 3. Enquanto que o projecto SUSTAINABLE BRIDGES recomenda o emprego de métodos probabilísticos apenas na fase 3, o procedimento proposto pelo JCSS, prevê que esses métodos possam ser empregues logo na fase 2. Em tudo o resto, os procedimentos em causa são muito idênticos.

3.5 Modelação de acções

Nas primeiras fases de avaliação da segurança de uma ponte existente usam-se as acções prescritas nos regulamentos em vigor. No entanto, se a ponte não cumprir os critérios de segurança desses regulamentos, uma possibilidade a ponderar é o uso de modelos de acções mais realistas para a ponte em avaliação, que podem ser calibrados a partir de informação colhida da ponte. Nesta secção dá-se ênfase a aspectos de modelação probabilística de acções e descrevem-se sumariamente alguns ensaios que poderão ser usados com o objectivo de obter uma caracterização mais precisa das acções.

As acções que interessa quantificar no âmbito da segurança de pontes existentes são aquelas com interesse nos estados limites últimos. Como visto anteriormente, a segurança aos estados limites de utilização é comprovada normalmente por meio de inspecções visuais (pelo menos em pontes que já estejam em serviço por um período de tempo razoável), não havendo assim necessidade de proceder a cálculos numéricos, e bem assim a quantificação de acções. Por conseguinte, em avaliações estruturais não haverá, em princípio, necessidade de considerar acções tais como variações de temperatura, efeitos da fluência e retracção e assentamentos de apoio, visto que estas têm pouca expressão na segurança aos estados limites últimos (NP EN 1992-1-1, 2010; CAN/CSA-S6-00, 2000).

Na presente secção consideram-se apenas a acção do peso próprio (de elementos estruturais e não estruturais) e a acção das sobrecargas rodoviárias, isto é, as acções determinantes da segurança do tabuleiro, que é normalmente o elemento estrutural que apresenta maiores níveis de degradação. Relativamente à acção sísmica, sabe-se que esta é preponderante principalmente nos elementos verticais das pontes (pilares e encontros, e respectivas fundações), mas tem pouca expressão no tabuleiro, cuja segurança é condicionada principalmente pelas acções verticais. Nos casos em que

haverá que considerar a acção sísmica, refere-se o trabalho desenvolvido no seio do projecto LESSLOSS, financiado pela Comissão Europeia, de que resultaram vários relatórios. Entre estes, destaca-se o relatório *Probabilistic Methods for Seismic Assessment of existing Structures* (LESSLOSS, 2007).

3.5.1 Peso próprio dos elementos estruturais

Em pontes de betão armado, o peso próprio é sem dúvida uma das acções mais importantes e a sua preponderância, relativamente a outras acções, aumenta com o vão. Há por isso toda a conveniência em caracterizar esta acção da forma mais precisa possível.

A incerteza dos efeitos do peso próprio do betão depende fundamentalmente de: (1) variabilidade do peso específico, (2) variabilidade das dimensões dos elementos estruturais e (3) imprecisão dos modelos estruturais (modelos que transformam as acções nos seus efeitos). Esta última fonte de incerteza será considerada mais à frente, quando se tratar dos modelos estruturais. Relativamente à variabilidade das dimensões dos elementos estruturais, esta pode ser, em muitas situações, considerada desprezável em comparação com a variabilidade de outras variáveis. De qualquer modo, aquando da realização de uma inspecção no âmbito de uma avaliação estrutural, é boa prática efectuar um levantamento das dimensões dos elementos estruturais, em locais previamente seleccionados, e compará-las com as dimensões previstas no projecto.

Nos casos em que se justifica considerar as incertezas nas dimensões dos elementos estruturais, usa-se em geral um modelo da forma $a = a_{nom} + \Delta a$, onde a_{nom} indica a dimensão do elemento estrutural em apreço que consta nos desenhos de construção, e Δa é uma variável aleatória. O *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a) contém recomendações relativas a esta variável, que evidentemente poderão ser ajustadas em função da realidade específica de cada estrutura.

Relativamente ao peso específico do betão armado, o seu valor depende de factores tais como: tipo de inerte, grau de compactação e densidade de armaduras. Uma vez que estas grandezas variam de local para local na estrutura, compreende-se que o peso específico deva ser modelado como variável aleatória, ou até mesmo como campo aleatório. Visto que em pontes de betão armado o peso do betão é uma das acções mais importantes, pode justificar-se a extracção de um certo número de carotes para serem pesadas em laboratório, antes de serem ensaiadas à compressão, e assim conseguir uma caracterização mais precisa da variabilidade do peso específico do betão.

Em alguns casos poderá justificar-se a medição de reacções existentes em aparelhos de apoio. Se o apoio do tabuleiro for realizado apenas com aparelhos de apoio, a soma das reacções obtidas permite estimar com razoável certeza a carga permanente total. Dependendo do grau de precisão das operações de medição, o peso do tabuleiro poderá então ser modelado com coeficiente de variação muito baixo, ou até mesmo modelado como variável determinística. As reacções nos aparelhos de apoio poderão ser medidas utilizando macacos para levantamento do tabuleiro e deflectómetros para medição dos deslocamentos (Santos, 2002). Como indicado na Figura 3.3, o diagrama força-deslocamento resultante é bi-linear. O primeiro troço possui elevada inclinação e corresponde ao efeito conjunto da rigidez axial do aparelho de apoio e da rigidez à flexão do tabuleiro. O segundo troço, com uma inclinação bastante menor, corresponde apenas à rigidez do tabuleiro e inicia-se quando o tabuleiro se separa do aparelho de apoio. Prolongando o segundo troço até ao eixo das ordenadas, obtém-se a reacção no aparelho de apoio.

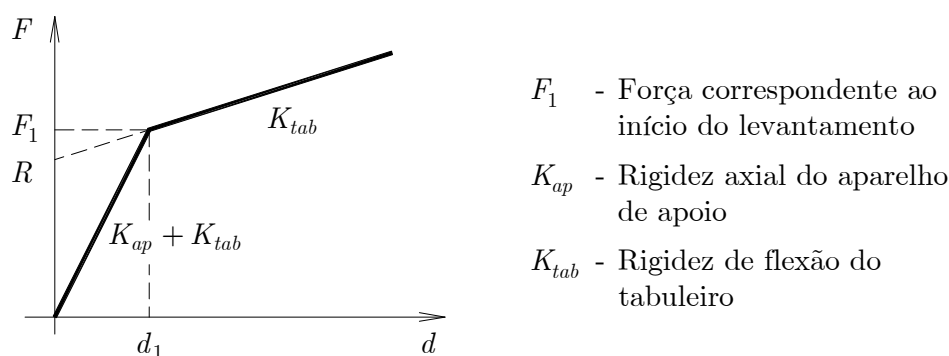


Figura 3.3: Gráfico força-deslocamento para medição da reacção em aparelhos de apoio. F é a força exercida pelo macaco e d é o deslocamento medido pelo deflectómetro (Santos, 2002).

É possível encontrar na bibliografia recomendações relativas ao peso específico de materiais estruturais. A Tabela 3.4 apresenta algumas das recomendações do *Probabilistic Model Code* (PMC) (JCSS, 2001a). Este documento recomenda a modelação do peso específico com uma variável Normal. Os valores que constam na Tabela referem-se a populações relativamente vastas (valores obtidos de várias fontes), pelo que, para uma estrutura particular, é de esperar que o coeficiente de variação do peso específico seja menor do que o valor tabelado. Assim, estes valores devem ser encarados como primeira estimativa.

Tabela 3.4: Peso específico de alguns materiais, de acordo com o PMC.

Material	Valor médio [kN/m ³]	Coef. de variação
Aço	77	< 0.01
Betão corrente	24 (*)	0.04
Betão de alta resistência	24 - 26 (**)	0.03
Betão leve	(**)	0.04 - 0.08

(*) Betão sem armaduras e estado higrométrico estabilizado

(**) Dependente da composição e tratamento.

Os valores constantes na Tabela acima referem-se a betão simples. Para betão armado, a NP EN 1990 (2009) recomenda o valor nominal de 25 kN/m³, que pode ser considerado, à falta de informação mais precisa, como valor médio.

O documento-guia dinamarquês (Vejdirektoratet, 2004) recomenda para o peso específico do betão o modelo Normal e, não existindo informação mais precisa, um coeficiente de variação de 0.05.

3.5.2 Restante carga permanente

A restante carga permanente refere-se ao peso dos elementos não estruturais e inclui: peso das vigas de bordadura, guarda-corpos, enchimento de passeios, lancis, guardas de segurança e tapete betuminoso. Em geral, a incerteza no peso destes elementos é superior à incerteza no peso dos elementos estruturais. Em inspecções realizadas no âmbito de avaliações estruturais, é boa prática efectuar um levantamento de medições com o objectivo de obter uma caracterização mais precisa destas cargas, particularmente a medição de espessuras do tapete betuminoso, visto que são frequentes recargas com este material ao longo do tempo.

Como primeira aproximação, o documento-guia dinamarquês (Vejdirektoratet, 2004) recomenda a modelação da restante carga permanente com distribuição Normal e coeficiente de variação igual a 0.10.

3.5.3 Sobrecargas rodoviárias

Considerações gerais

Uma vez que as pontes rodoviárias têm por finalidade básica suportar tráfego rodoviário, as sobrecargas associadas ao tráfego são, sem dúvida, uma das acções mais importantes a considerar no projecto ou na avaliação da segurança de pontes existentes. Para pontes de pequeno e médio vão, as sobrecargas rodoviárias

representam de facto uma parcela substancial dos esforços actuantes, particularmente no tabuleiro.

A modelação de sobrecargas rodoviárias tem suscitado em anos recentes enorme interesse, particularmente no âmbito de avaliações estruturais, dado o grande potencial na redução de esforços actuantes quando o tráfego é modelado de forma mais realista (Caprani *et al.*, 2003). Efectivamente, os modelos de sobrecarga preconizados nos regulamentos e normas para projecto de pontes novas tendem a ser conservativos, não só por razões de simplicidade, mas também devido ao reconhecimento de que o custo marginal de segurança em pontes novas é inferior ao custo marginal de segurança em pontes existentes (CAN/CSA-S6-00, 2000; Moses, 2001).

Estudos têm demonstrado que as sobrecargas de tráfego podem variar substancialmente de local para local e podem ser bastante mais baixas que as especificadas em regulamentos e normas para projecto de pontes novas (SAMARIS, 2006b). Assim, perante uma avaliação estrutural, deve-se ponderar a possibilidade de usar modelos de sobrecarga desenvolvidos especificamente para a ponte em avaliação. Tais modelos podem ser calibrados a partir de observações de tráfego real recorrendo a equipamentos de pesagem dinâmica, vulgarmente conhecidos pela sigla WIM (*Weigh-in-motion*). Esta tecnologia, recorrendo a sensores embebidos no pavimento, permite a medição de características dos veículos (pesos por eixo e distâncias entre eixos) e suas velocidades, sem que estes tenham necessidade de parar. As observações são feitas durante um período de tempo e extrapoladas para períodos de tempo maiores usando metodologias estatísticas bem estabelecidas. O projecto COST 345 (2004b) descreve vários exemplos onde foi empregue tecnologia WIM. O projecto SAMARIS (2006b) contém também uma boa descrição do método.

Analisa-se de seguida, resumidamente, os principais factores que afectam os efeitos das sobrecargas rodoviárias nas pontes.

Peso bruto dos veículos. Este é o primeiro factor a considerar. Existem limites legais impostos aos pesos dos veículos em circulação (Decreto-Lei n.º 99/2005), mas a experiência mostra que estes limites são frequente e largamente ultrapassados.

Distância entre eixos e pesos por eixo. Obviamente o número de eixos e a distância entre si é importante. Para o mesmo peso bruto, quanto menor for a distancia entre eixos, maiores serão os esforços provocados. O efeito da distância entre eixos atenua-se à medida que o vão da ponte aumenta, particularmente em momentos flectores. O peso transmitido por eixos individuais é importante em efeitos locais e em relação ao esforço transversal.

Intensidade (ou volume) de tráfego. A intensidade de tráfego é o número de veículos que chegam a uma ponte por unidade de tempo. Obviamente que quanto maior for a intensidade de tráfego, maior é a quantidades de veículos que atravessam a ponte durante um determinado período de tempo, e consequentemente maior é a probabilidade de se registrar a passagem de veículos com peso extremo nesse período.

Composição do tráfego. Existem itinerários que em virtude da sua localização ou do tipo de tráfego que neles circula (tráfego internacional, regional ou local) têm percentagens de camiões superiores a outros itinerários. Quanto maior é a percentagem de camiões maior é a probabilidade de se registrar a passagem de veículos com peso elevado.

Situação de tráfego (fluido, lento ou congestionado). Todas as pontes experimentam estas situações de tráfego. Normalmente pontes situadas em meio urbano ou em vias de acesso a cidades estão sujeitas com grande frequência a tráfego congestionado. O tráfego congestionado é caracterizado pela existência de filas de veículos em marcha lenta e com curta distância entre si. Esta é a situação condicionante para pontes de grande vão. O tráfego fluido, caracterizado pela circulação de veículos com distâncias apreciáveis entre si e circulando a velocidades razoáveis, é condicionante para pontes de pequeno e médio vão (até 50 a 60 m) (Vejdirektoratet, 2004). De facto para estas pontes a situação condicionante é a passagem de um único veículo pesado (por via), a que se deve juntar o efeito de amplificação dinâmica.

Efeito dinâmico. Por serem cargas móveis, as sobrecargas rodoviárias introduzem na estrutura acelerações e, consequentemente, um agravamento dos esforços em relação aos que existiriam se as cargas fossem estáticas. Em geral só se considera efeito dinâmico em situações de tráfego fluido. Veículos circulando a baixa velocidade, como sucede nas situações de tráfego congestionado, exercem efeitos dinâmicos relativamente limitados, podendo ser desprezados para velocidades de circulação abaixo dos 10 km/h (Vejdirektoratet, 2004).

Velocidade de circulação. A velocidade de circulação, além de exercer alguma influência nos aspectos dinâmicos, afecta a probabilidade dos chamados *meeting events* — eventos de carga caracterizados pela presença simultânea de veículos lado a lado, em vias adjacentes. Quanto maior é a velocidade menor é a taxa de ocorrência desses eventos.

Número de vias. À medida que o número de vias aumenta, a sobrecarga média por metro de largura de tabuleiro tende a diminuir e assim também os esforços por metro de largura do tabuleiro, uma vez que a probabilidade de todas as vias estarem carregadas com os veículos com peso máximo tende a reduzir-se. O sentido das vias

também é importante. Para uma plataforma de rodagem constituída por duas vias, é mais provável existirem dois veículos pesados lado a lado na secção crítica quando as vias têm o mesmo sentido.

Vão da ponte. O vão da ponte é outro factor a ter em conta. Quanto maior é o vão, maior é o número de veículos que o vão pode comportar e menor é a probabilidade de todos os veículos estarem carregados com peso máximo. Isto significa que a sobrecarga média por unidade de comprimento de via tende a reduzir-se com o vão (BD 21/01, 2001).

Possibilidade de crescimento futuro. É um facto que o tráfego rodoviário tem vindo a crescer ao longo dos anos, quer em volume, quer em pesos brutos, facto que se tem reflectido nas sucessivas revisões dos regulamentos (Dawe, 2003; Calgaro *et al.*, 2010). Assim não surpreenderá que continue a haver aumentos no futuro, aspecto que deve ser tomado em consideração quer no projecto de pontes novas, quer na avaliação das existentes. Deve-se reconhecer, porém, que a existência de limites legais nos pesos e dimensões dos veículos e a necessidade de garantir a segurança das pontes existentes exercem, sem dúvida, alguma restrição à possibilidade de aumentos futuros.

Em vista da multiplicidade dos factores acabados de descrever, compreende-se que a modelação precisa das sobrecargas rodoviárias não seja uma tarefa simples. Os métodos para a determinação dos efeitos do tráfego rodoviário dividem-se nas seguintes categorias (Caprani, 2005):

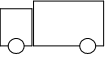
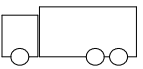
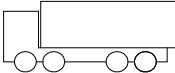
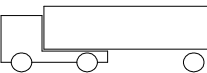
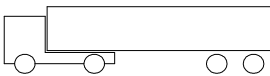
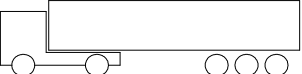

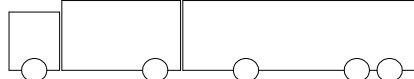
- 1) Modelos probabilísticos teóricos, baseados na teoria dos processos estocásticos e em determinadas hipóteses de comportamento do tráfego (Madsen *et al.*, 1986; Ditlevsen & Madsen, 1994).
- 2) Modelos baseados em configurações estáticas de tráfego, procurando cobrir todas as situações verosímeis de ocorrer durante a vida da estrutura, nomeadamente situações de tráfego fluido e congestionado. O método baseia-se em registos de tráfego real, procurando quantificar probabilisticamente todos os parâmetros relevantes que caracterizam o tráfego. Com base nestes parâmetros são geradas artificialmente as referidas configurações estáticas, semelhantes aquelas que se captam com o auxílio de uma máquina fotográfica.
- 3) Modelos baseados em simulação computacional do fluxo de tráfego. Partindo de registos de tráfego real recorrendo a tecnologia WIM, o método consiste em atribuir distribuições de probabilidade às características pertinentes do fluxo tráfego, nomeadamente, composição de tráfego, distâncias entre veículos (*headway*), intensidade de tráfego, velocidades, e ainda às variáveis que

caracterizam os veículos, nomeadamente, pesos brutos, distâncias entre eixos e pesos por eixo (Crespo-Minguillón & Casas, 1997; Caprani, 2005).

Limites legais

O Decreto-Lei n.º 99/2005 aprovou o «Regulamento que Fixa os Pesos e as Dimensões Máximos Autorizados para os Veículos em Circulação», transpondo para o direito interno a Directiva n.º 2002/7/CE do Parlamento Europeu e do Conselho, de 18 de Fevereiro. Tratando-se de uma Lei com origem numa directiva Europeia, é de esperar que outros países da Europa tenham adoptado limites semelhantes aos autorizados pelo D.L. acima referido, o que sem dúvida terá um efeito unificador no tráfego nos diferentes países da Europa.

Tabela 3.5: Pesos brutos máximos para veículos de transporte de mercadorias (D.L. n.º 99/2005).

Tipo de veículo	N.º eixos	Exemplo	Peso bruto [tf]
Veículo simples	2		19
	3		26
	4 ou mais		32
Semireboques	3		29
	4		38
	5 ou mais		40
Camiões	3	-	29
com	4		37
reboque	5 ou mais		40

Nota: Para camiões transportando contentores ISO, o peso máximo permitido é de 44 tf.

O referido Decreto-Lei classifica os veículos pesados (veículos com peso superior a 3.5 tf) em duas categorias: veículos de transporte de mercadorias e veículos de transporte de passageiros. Para o mesmo número de eixos, os pesos permitidos para os veículos de transporte de mercadorias é ligeiramente superior. A Tabela 3.5 mostra

os referidos limites legais para esses veículos. Conforme se observa, os pesos máximos permitidos variam entre 19 tf (camiões de 2 eixos) e 40 tf (camiões com 5 ou mais eixos). Para camiões transportando contentores ISO, o peso máximo pode ir até 44 tf, que é portanto o peso bruto máximo permitido.

Quantificar os valores das sobrecargas rodoviárias com base nos limites legais certamente não é um procedimento seguro, dada a prática bastante generalizada da circulação de veículos com peso superior ao permitido. No entanto, tais limites devem constituir uma referência. A Norma BD 21/01 (2001) propõe um modelo de sobrecarga a ser utilizado em avaliações de pontes existentes desenvolvido justamente a partir dos limites legais no Reino Unido, semelhantes aos indicados na Tabela acima. Para ter em conta a prática, bastante frequente, da circulação de veículos com excesso de carga, foi usado um factor, chamado factor de excesso de peso, que depende do vão L da ponte (Figura 3.4). Este factor foi calibrado a partir de uma amostra de 3 500 veículos obtida em estações de pesagem. Conforme se observa, o factor de excesso de peso diminui com o vão, o que se justifica atendendo a que à medida que o vão aumenta, aumenta também o número de veículos e a eventual presença de veículos com excesso de peso tende a ser compensada pela presença de veículos com menor carga.

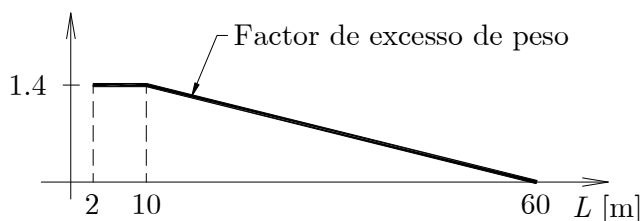


Figura 3.4: Factor de excesso de peso usado na Norma BD 21/01 (2001).

O problema da extrapolação

O problema da extrapolação enuncia-se do seguinte modo. Seja $Q = \{\text{pesos brutos dos veículos pesados que atravessam uma determinada ponte}\}$. Q é naturalmente uma variável aleatória. O problema consiste em determinar o valor de Q correspondente a um determinado período de retorno a partir de uma amostra $\{q_1, \dots, q_N\}$ dos pesos brutos de N veículos observados durante um período limitado (1 mês, por exemplo). A partir dessa amostra deseja-se também determinar a distribuição dos máximos de Q referente a um determinado período, por exemplo o período de vida útil da estrutura. O período a que se refere a distribuição de máximos designa-se por *período de referência*.

Uma possibilidade de resolução do problema consiste em extrair da amostra $\{q_1, \dots, q_N\}$ os máximos diários e determinar os parâmetros da distribuição Gumbel (em geral aceite como modelo apropriado na modelação de máximos de pesos de veículos) que se ajustam a essa nova amostra. Uma vez determinados os parâmetros da distribuição dos máximos diários, a determinação do peso Q correspondente a um determinado período de retorno é imediata.

Com efeito, considere-se o evento $\{Q_{\max, \tau} > a\}$, onde $Q_{\max, \tau} = \{\text{máximo de } Q \text{ no período de referência } \tau\}$. O período de retorno desse evento é o valor médio da variável aleatória $T = \{\text{intervalo de tempo entre ocorrências sucessivas desse evento}\}$ e é dado por $\bar{T} = 1 / p$ (Ang & Tang, 2007), onde p é a probabilidade do evento em questão, isto é, $p = P(Q_{\max, \tau} > a) = 1 - F_{Q_{\max, \tau}}(a)$. Assim, o período de retorno do evento $\{Q_{\max, \tau} > a\}$ é dado por:

$$\bar{T} = \frac{1}{1 - F_{Q_{\max, \tau}}(a)}. \quad (3.1)$$

Resolvendo (3.1) em ordem a a , tem-se:

$$a = F_{Q_{\max, \tau}}^{-1} \left(1 - \frac{1}{\bar{T}} \right). \quad (3.2)$$

As equações acima mostram que a cada valor a de Q corresponde um e um só período de retorno.

Admita-se então que os máximos diários dos pesos Q dos veículos que atravessam determinada ponte seguem uma distribuição Gumbel, com parâmetros u_1 e α , estimados a partir dos dados disponíveis. Ora, a inversa desta distribuição é dada por $F^{-1}(p) = u_1 - (1 / \alpha) \ln(-\ln p)$ (ver Anexo A). Assim, o valor de Q a que corresponde o período de retorno \bar{T} é dado por:

$$Q_{\bar{T}} = F_{Q_{\max, \tau}}^{-1} \left(1 - \frac{1}{\bar{T}} \right) = u_1 - (1 / \alpha) \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{\bar{T}} \right) \right), \quad (3.3)$$

e o problema da extrapolação fica resolvido. Ao aplicar esta equação é importante ter presente que o período de retorno \bar{T} deve ser expresso nas unidades de tempo a que se refere o período de referência τ . Assim, por exemplo, se $\tau = 1$ dia, o período de retorno deve ser expresso em dias.

Outra possibilidade para resolver o problema da extrapolação consiste em realizar um ajuste directo ao histograma da amostra $\{q_1, \dots, q_N\}$ disponível, obtendo-se uma determinada distribuição $f_Q(q)$, conhecida como *distribuição inicial*. Existem vários métodos para a determinação da distribuição de máximos (referente a um determinado período) a partir da distribuição inicial. No Anexo B descrevem-se três

desses métodos: (1) extrapolação usando a distribuição de extremos exacta, (2) extrapolação considerando chegadas de veículos segundo um processo de Poisson e (3) extrapolação usando a distribuição de Gumbel. A fórmula de Rice tem sido também frequentemente utilizada em problemas de extrapolação (Cremona, 2001; Calgaro *et al.*, 2010).

De referir que a amostra $\{q_1, \dots, q_N\}$ é em geral bi ou tri-modal (Brime, 2001), e regra geral o ajuste é realizado com uma distribuição Normal também bi ou tri-modal. Por exemplo, o histograma mostrado na Figura 3.5, extraído de O'Connor & O'Brien (2005), é claramente bi-modal. O histograma refere-se ao peso bruto de semi-reboques com 5 eixos registados numa auto-estrada ligando as cidades de Paris a Lille, em França, em 1997. A primeira moda é representativa de semi-reboques parcialmente carregados e a segunda moda representa semi-reboques integralmente carregados. Para histogramas bi-modais, adopta-se o modelo Normal bi-modal, que tem a forma: $f_Q(q) = \rho N(q | \mu_1, \sigma_1) + (1 - \rho)N(q | \mu_2, \sigma_2)$, com $0 < \rho < 1$. Trata-se pois de uma distribuição com 5 parâmetros, que poderão ser determinados recorrendo ao método da máxima verosimilhança. Como é evidente, para efeitos de extrapolação interessa a zona do histograma mais à direita, isto é, interessam os parâmetros μ_2 e σ_2 . Uma vez estimados estes parâmetros, pode realizar-se com relativa facilidade as extrapolações pretendidas, empregando um dos métodos descritos no Anexo referido acima.

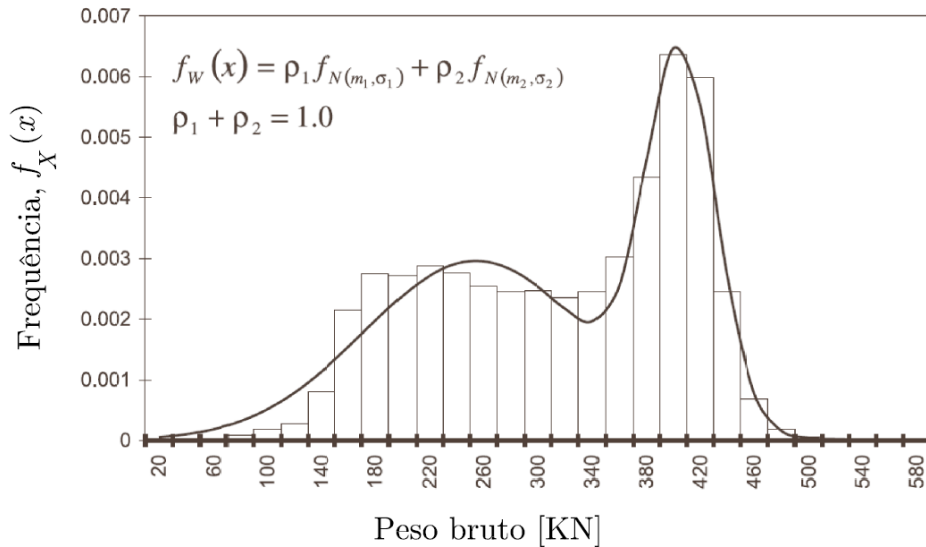


Figura 3.5: Histograma do peso bruto de semi-reboques de 5 eixos e ajuste com distribuição Normal bi-modal (O'Connor & O'Brien, 2005).

Observe-se que, no histograma acima, a segunda moda é sensivelmente de 400 kN, que corresponde ao peso máximo permitido por lei para os semi-reboques com 5 eixos. Obtiveram-se resultados similares nas campanhas de medições de tráfego realizadas

para a calibração dos modelos da EN 1991-2 (2003), isto é, observou-se sistematicamente que as segundas modas, μ_2 , dos histogramas de cada tipo de veículo coincidia sensivelmente com o peso máximo permitido por lei para esse tipo de veículo. Relativamente ao desvio padrão na zona da segunda moda, σ_2 , observaram-se valores entre 3.4 tf e 7.8 tf, dependendo do tipo de veículo. A média dos desvios-padrão é sensivelmente de 5 tf. É interessante que o documento Vejdirektoratet (2004) preconiza justamente o valor de 5 tf, a adoptar para todos os camiões previstos nesse documento.

O problema da presença múltipla

A presença múltipla diz respeito à existência simultânea de mais do que um veículo num evento de carga e pode ser separado em dois problemas: múltipla presença na direcção longitudinal (veículos na mesma via) e múltipla presença na direcção transversal (veículos lado a lado, em vias adjacentes).

Um factor importante que determina a múltipla presença longitudinal é a fluidez do tráfego. Tráfego congestionado é caracterizado por filas de veículos circulando a baixa velocidade e com pequenas distâncias entre si. Nesta situação, e atendendo à baixa velocidade dos veículos, não se considera em geral os efeitos de amplificação dinâmica. Como referido anteriormente, cenários de tráfego congestionado são normalmente os que produzem esforços mais gravosos em pontes de grande vão. Para pontes de vão moderado (até cerca de 40 m a 60 m) a situação mais gravosa ocorre em cenários de tráfego fluido, caracterizado por veículos circulando com velocidades apreciáveis e grandes distâncias entre si. Não há por isso que considerar mais do que um veículo na mesma via, mas é necessário considerar o efeito dinâmico (Vejdirektoratet, 2004).

Relativamente à múltipla presença transversal, a sua importância depende fortemente do tipo de secção transversal do tabuleiro. Por exemplo, para um tabuleiro em laje vigada (caracterizado por elevada deformabilidade transversal), constituído por duas vigas longitudinais e suportando uma plataforma de rodagem com duas vias, uma por cada viga, quando um veículo é posicionado numa das vigas, os esforços provocados pelo veículo são absorvidos maioritariamente por essa viga, acabando por não existir diferença significativa entre o caso com apenas um veículo sobre uma das vigas e o caso com dois veículos, um em cada viga. Já para uma secção em caixão, caracterizado por elevada rigidez transversal, a distinção entre os casos de carga mencionados assume maior importância. Quando for necessário modelar a múltipla presença transversal, refere-se o modelo proposto em Vejdirektoratet (2004), que permite determinar a distribuição dos esforços máximos (referente a um

determinado período) em tabuleiros comportando duas vias e em situações de tráfego fluido. O modelo é generalizável para tabuleiros comportando mais do que duas vias.

Efeito de amplificação dinâmica

O efeito de amplificação dinâmica é tido normalmente em conta multiplicando as cargas estáticas (ou os seus efeitos) por um factor — chamado *factor de amplificação dinâmica*, ou simplesmente factor dinâmico, isto é,

$$R_{dyn} = DAF \cdot R_{sta}, \quad (3.4)$$

onde R_{dyn} representa o valor máximo da resposta dinâmica da grandeza em estudo e R_{sta} o valor máximo da resposta estática. O factor de amplificação dinâmica, DAF (*Dynamic Amplification Factor*), é por vezes expresso como:

$$DAF = 1 + DA, \quad (3.5)$$

onde DA se designa por *amplificação dinâmica*. Pode então escrever-se $R_{dyn} = (1 + DA) \cdot R_{sta} = R_{sta} + DA \cdot R_{sta}$.

O factor dinâmico pode ser avaliado quer por via experimental quer por via analítica. Depende de muitos factores, destacando-se (Calçada, 2001):

- 1) Características dinâmicas da ponte (massa, rigidez e amortecimento) que, por sua vez, se repercutem nas frequências de vibração. Os maiores efeitos dinâmicos tendem a ocorrer quando as frequências naturais da ponte e as frequências dos veículos se aproximam (fenómeno de ressonância).
- 2) Estado do pavimento, em termos de irregularidades e eventual existência de ressaltos.
- 3) Factores dependentes do próprio tráfego, incluindo peso dos veículos, tipo de suspensões (pneumáticas *versus* à base de lâminas metálicas), velocidade dos veículos.
- 4) Tipo de resposta a analisar (momento flector, esforço transversal, reacção, deslocamento, etc.).

Algumas das variáveis acima são nitidamente variáveis aleatórias (as relacionadas, por exemplo, com a condição dos veículos ou com a condição do pavimento) o que torna o próprio factor dinâmico uma variável aleatória. De facto, mesmo para uma ponte específica, o factor dinâmico não pode ser predito com absoluta certeza (Cooper, 1997).

O documento-guia dinamarquês para avaliação de pontes existentes (Vejdirektoratet, 2004) propõe o seguinte modelo:

- 1) Efeitos globais (comprimentos de influência $L \geq 2.50$ m):

$$DAF \sim N\left(\mu = 1 + \frac{41.5}{Q}, \sigma = \frac{41.5}{Q}\right), \quad (3.6)$$

onde Q é o peso bruto do veículo em kN.

- 2) Efeitos locais (comprimentos de influência $L < 2.5$ m):

$$DAF \sim N\left(\mu = 1 + \frac{83}{Q} - \frac{16.6L}{Q}, \sigma = \frac{83}{Q} - \frac{16.6L}{Q}\right), \quad (3.7)$$

O documento refere que o factor acima é válido para situações de passagem normal. Para situações de passagem caracterizadas por baixa velocidade de circulação ($V < 10$ km/h) o factor dinâmico é desprezável. A Figura 3.6 mostra graficamente o modelo probabilístico descrito acima, para o caso $L > 2.5$ m. O gráfico foi gerado artificialmente considerando veículos com pesos entre 35 kN e 800 kN. Observe-se o decrescimento acentuado do factor dinâmico com o peso do veículo. Note-se que, de acordo com este modelo, para veículos de 35 kN é elevada a probabilidade de se obter coeficientes dinâmicos superiores a 2.

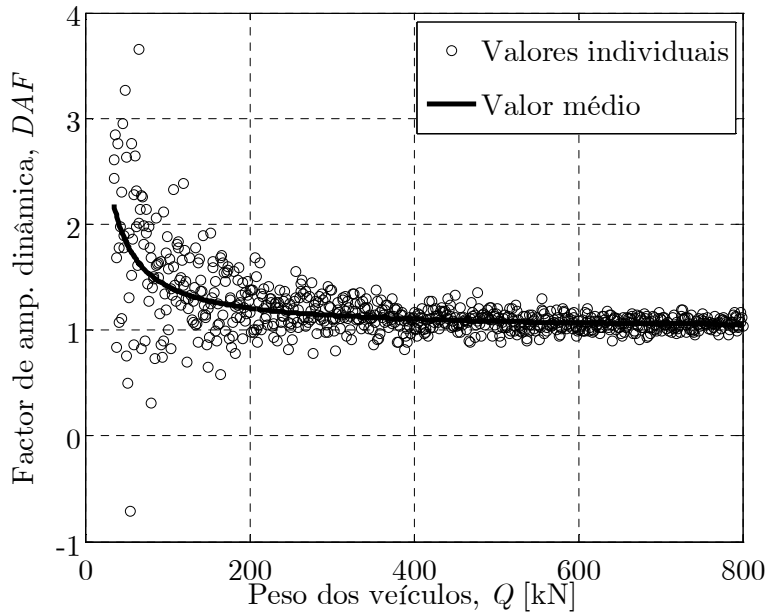


Figura 3.6: Gráfico de dispersão de pontos (Q, DAF) gerado em harmonia com o modelo proposto em Vejdirektoratet (2004).

O projecto SAMARIS (2006b) descreve um programa experimental de medição de coeficientes dinâmicos levado a cabo em 2004 numa ponte que, segundo os autores, tinha elevada susceptibilidade a vibrações e portanto representativa das pontes mais desfavoráveis do ponto de vista do efeito de amplificação dinâmica. O programa

experimental recorreu a equipamento B-WIM[†] que para o efeito foi dotado de um módulo especial para a determinação do coeficiente dinâmico. O programa experimental foi repetido duas vezes, uma com o pavimento no estado original, bastante irregular, e outra depois da repavimentação, o que permitiu apreciar a influência do estado do pavimento. Após a repavimentação o valor médio do coeficiente dinâmico desceu para cerca de metade, o que demonstra a importante influência deste factor.

As conclusões do estudo vieram confirmar o resultado expresso no modelo dinamarquês, que prevê uma redução do coeficiente dinâmico com o peso dos veículos. Isto sugere que para valores de sobrecarga associados a elevados períodos de retorno se devam usar coeficientes dinâmicos relativamente pequenos.

Cooper (1997) propõe a modelação do coeficiente dinâmico por meio de um modelo Normal, como o documento dinamarquês. Porém, este autor faz depender a média e o desvio padrão do coeficiente dinâmico de outros factores, incluindo o estado do pavimento, a frequência própria fundamental da ponte (que pode ser estimada a partir do vão da ponte, dada a forte correlação que existe entre as duas grandezas) e o número de vias carregadas.

3.5.4 Influência da vida residual no valor característico das acções variáveis

Os valores característicos das acções variáveis poderão ser ajustados levando em conta o período de vida residual fixado para a ponte em avaliação (Schneider, 2006). Recorde-se que o valor característico de uma acção variável é o valor que tem uma probabilidade relativamente pequena (em geral $p = 0.05$) de ser excedido num determinado período de referência, em geral o período de vida útil da estrutura. Assim, tomando como referência uma dada acção X e considerando que a vida útil de uma estrutura foi estipulada inicialmente em n anos, a estrutura terá sido dimensionada para o valor de X dado por $X_{n,k} = F_{X_{\max,n}}^{-1}(1 - p)$, onde $F_{X_{\max,n}}^{-1}(\cdot)$ representa a inversa da distribuição acumulada dos máximos de X em n anos.

Suponha-se agora que, no momento da avaliação, foi atribuída à estrutura uma vida residual de m anos. Pretende-se determinar o novo valor característico da acção, $X_{m,k}$. A resposta depende naturalmente da distribuição de X e em particular das distribuições dos máximos de X em n e em m anos. Admita-se que os máximos de X segue uma distribuição de Gumbel, e que, em particular, os máximos anuais de X

[†] Sistema que, para além de medir as características do tráfego através de sensores embebidos no pavimento, inclui também a medição da resposta da superestrutura, através da sua instrumentação.

têm a distribuição $Gumb(u_1, \alpha)$. Assim, os máximos de X em n anos continuam a seguir uma distribuição Gumbel, mas com a moda igual a $u_n = u_1 + (1/\alpha)\ln n$. O parâmetro α mantém-se constante (Gumbel, 1958). Da mesma forma, os máximos de X em m anos têm a moda $u_m = u_1 + (1/\alpha)\ln m$. Ora, sabe-se que a inversa da distribuição de Gumbel é dada por $F_X^{-1}(x) = u - (1/\alpha)\ln(-\ln x)$. Assim,

$$X_{n,k} = u_n - (1/\alpha)\ln(-\ln(1-p)) = u_1 + (1/\alpha)\ln n - (1/\alpha)\ln(-\ln(1-p)), \quad (3.8)$$

e da mesma forma,

$$X_{m,k} = u_1 + (1/\alpha)\ln m - (1/\alpha)\ln(-\ln(1-p)). \quad (3.9)$$

Subtraindo (3.8) a (3.9), tem-se $X_{m,k} - X_{n,k} = (1/\alpha)\ln(m/n)$. Encontrou-se assim a relação pretendida, isto é:

$$X_{m,k} = X_{n,k} + (1/\alpha)\ln(m/n). \quad (3.10)$$

Esta expressão permite determinar o valor característico de uma acção variável (com distribuição Gumbel) em relação a um determinado período de referência a partir do valor característico relativo a outro período de referência. Note-se que o resultado é independente do quantilho utilizado para o valor característico. Note-se ainda que os valores de m e n podem ser quaisquer, isto é, m pode ser maior ou menor que n . Para $m = n$, tem-se $X_{m,k} = X_{n,k}$, como não podia deixar de ser.

Concretizando com um exemplo, suponha-se que uma ponte foi dimensionada originalmente para um veículo com peso de 600 kN e que esta acção refere-se a um período de 50 anos. Suponha-se que a ponte vai ser substituída num prazo de 5 anos e deseja-se avaliar a segurança usando uma sobrecarga corrigida em conformidade com este prazo. A vida residual da ponte é assim de 5 anos. Considerando $\alpha = 0.6 \text{ kN}^{-1}$, que é um valor razoável para sobrecargas rodoviárias (ver Capítulo 6), tem-se $X_{5,k} = 600 + (1/0.6)\ln(5/50) = 596 \text{ kN}$. A diferença em relação aos 600 kN originais é muito pequena, mas para outro tipo de acção a diferença poderá ser maior. A razão para esta redução pouco significativa no valor característico deve-se ao facto dos máximos das sobrecargas rodoviárias terem em geral coeficiente de variação muito pequeno, mesmo para períodos de referência baixos. De facto, mesmo para períodos de referência relativamente pequenos, o número de camiões que atravessam as pontes é em geral significativo, o que faz com que os máximos observados em sucessivos períodos de referência possuam baixa variabilidade. No caso da ponte em apreço é expectável que no período de vida residual (5 anos) a ponte venha a ser atravessada por um número significativo de veículos, o que torna bastante plausível que alguns desses veículos tenham pesos bastante elevados.

3.6 Modelação da estrutura

A análise estrutural tem por objectivo a determinação dos efeitos das acções na estrutura (esforços, deslocamentos, tensões, etc.) e é realizada através de um modelo numérico, chamado modelo estrutural, ou modelo de cálculo. O modelo estrutural destina-se assim à determinação da resposta da estrutura face às acções que nela actuam, podendo expressar-se de forma simbólica através de uma relação funcional do tipo:

$$E = E(X_1, \dots, X_n), \quad (3.11)$$

onde E representa a resposta predita pelo modelo e (X_1, \dots, X_n) o vector das variáveis básicas, que inclui não só as acções, mas também parâmetros geométricos e propriedades dos materiais que influenciam a resposta.

Em geral distinguem-se os seguintes tipos de análise estrutural: (1) análise elástica linear, (2) análise elástica seguida de redistribuição limitada, (3) análise plástica (ou análise com redistribuição total) e (4) análise não linear, podendo esta última incluir quer as não linearidades físicas (ou dos materiais), quer as não linearidades geométricas (teoria de 2.^a ordem). O tipo de análise a realizar depende da fase da avaliação em que se está. Como visto anteriormente, nas primeiras fases de uma avaliação estrutural recomenda-se geralmente o uso de modelos simples, deixando os modelos mais sofisticados para uma fase posterior.

Actualmente, graças à disponibilidade de ferramentas informáticas, a modelação estrutural não oferece dificuldade de maior, sendo possível modelar a estrutura com um grau razoável de rigor. Ainda assim, não é possível eliminar completamente as incertezas da análise. Por exemplo, poderão existir influências ambientais que afectam a resposta da estrutura, mas que são excluídas do vector das variáveis básicas. É o caso da temperatura que pode afectar a resposta dinâmica das estruturas. Neste sentido pode afirmar-se que é impossível prever exactamente qual vai ser a resposta dinâmica da estrutura, pois depende de uma grandeza que não pode ser predita com certeza absoluta. Existem ainda outras incertezas relacionadas com o próprio modelo estrutural, como por exemplo as originadas nas simplificações introduzidas ao nível das condições fronteira, que são normalmente modeladas de forma ideal, com os graus de liberdade perfeitamente restringidos, ou perfeitamente livres. Na prática, os apoios estarão numa condição intermédia entre a perfeitamente fixa e a perfeitamente livre. A interacção solo-estrutura é também frequentemente modelada de forma simplificada. Em estruturas cujos esforços dependam do faseamento construtivo, como é o caso de pontes construídas tramo a tramo ou construídas por avanços em

consola, pode existir também considerável incerteza a respeito dos esforços instalados, especialmente porque variam ao longo do tempo (efeitos diferidos).

Para atender a essas e outras fontes de incerteza, a resposta E predita pelo modelo estrutural (que se desvia da resposta verdadeira E') deverá ser afectada por uma variável aleatória, podendo adoptar-se uma das seguintes formas (forma multiplicativa ou forma aditiva) (JCSS, 2001a):

$$E' = \theta E, \quad (3.12)$$

$$E' = E + \theta. \quad (3.13)$$

A variável θ pretende assim corrigir os erros do modelo estrutural, isto é, as diferenças entre os valores preditos pelo modelo e os valores que a estrutura teria se fosse solicitada pelas acções consideradas (mais as que se desprezam na análise). Como esses erros são desconhecidos, a variável θ traduz a confiança que se tem no modelo que estiver a ser utilizado, devendo assim ser fixado de forma criteriosa caso a caso. A título de referência, mostra-se na Tabela 3.6 as recomendações do *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a). Observe-se que o modelo Lognormal deve ser aplicado na forma multiplicativa (Eq. (3.12)) e o modelo Normal na forma aditiva (Eq.(3.13). Enfatiza-se que estas recomendações podem e devem ser ajustadas caso a caso.

Tabela 3.6: Modelos probabilísticos para a variável θ —
incerteza nos modelos estruturais (JCSS, 2001a).

Tipo de modelo	Tipo de resposta	Distribuição	Média	Coef. de var.
Modelos de barras	Momentos	Lognormal	1.00	0.10
	Esf. Axial	Lognormal	1.00	0.05
	Esf. Transverso	Lognormal	1.00	0.10
Modelos de placa	Momentos	Lognormal	1.00	0.20
	Forças	Lognormal	1.00	0.10
Modelos de sólidos	Tensões	Normal	0.00	0.05

3.7 Modelação de resistências

Os modelos de resistência são os modelos que transformam variáveis básicas (propriedades dos materiais e parâmetros geométricos) em esforços resistentes (flexão, esforço transverso, torção, punçoamento, etc.). Em geral os modelos utilizados são os mesmos que se utilizam no âmbito de projecto de estruturas novas. No entanto, no âmbito de avaliações estruturais, as propriedades dos materiais a usar devem ser de

preferência as reais (se disponíveis) e não as prescritas no caderno de encargos da estrutura ou no regulamento que serviu de base ao projecto da mesma (ISO 13822, 2001). Para tal, podem ser consultados os registos de obra (por exemplo, ensaios de resistência de cubos de betão ou certificados de qualidade de aços) podendo ainda recorrer-se a um conjunto de ensaios não destrutivos criteriosamente escolhidos.

As pontes existentes exibem frequentemente alguma forma de deterioração, colocando-se a questão de avaliar até que ponto tais manifestações de deterioração afectam a resistência. A este respeito é interessante notar que um estudo conduzido por Gurenich & Robert (2006), baseado numa análise de regressão realizada em cerca de 360 000 pontes nos EUA, concluiu haver fraca correlação entre a condição da ponte e a capacidade de carga estimada. Relativamente a estruturas de betão armado, parece então poder concluir-se que estados de deterioração que não envolvam perda de secção de armaduras e delaminação significativa, têm pouco efeito na capacidade de carga das pontes, o que se harmoniza com as conclusões reportadas no artigo *La corrosion de las armaduras y la vida residual de las estructuras de hormigón* (Santiago *et al.*, 2000).

Segundo SAMARIS (2006a) foram identificados dois países, EUA e Eslovénia, com orientações definidas sobre o modo de levar em conta o estado de deterioração nos esforços resistentes. Embora a formulação difira, o princípio básico é o mesmo: os esforços resistentes são multiplicados por um factor inferior à unidade, função do índice de condição atribuído ao elemento estrutural em estudo. No caso dos EUA, a Norma AASHTO LRFR refere explicitamente que o factor de redução da resistência aí preconizado destina-se principalmente a cobrir a incerteza da influência da deterioração e sua evolução futura, e não tanto a modelar uma diminuição efectiva de resistência.

Em estruturas de betão armado com corrosão, sabe-se que os produtos da corrosão têm cerca de 7 a 8 vezes o volume inicial, originando delaminação e, conseqüentemente, perda de aderência. Evidentemente, se um varão perder a aderência em todo o seu comprimento, tal perda equivale à remoção do varão da estrutura. No entanto, se as extremidades dos varões estiverem convenientemente amarradas, a armadura com perda generalizada de aderência comporta-se como uma armadura exterior, cujo aumento de tensão na passagem ao estado limite é conseguido pela deformação da viga. Em elementos de elevada ductilidade, como é o caso das lajes, pode-se estimar o aumento de tensão recorrendo a modelos rigidoplásticos (FIP, 1998). Deve-se referir, porém, que no estudo citado acima (Santiago *et al.*, 2000), que envolveu um extenso programa experimental de vigas e pilares com armaduras corroídas, os autores reportaram que a diminuição de

aderência provocada pela delaminação do betão e pelos produtos da corrosão não afectou a capacidade resistente das vigas ensaiadas.

De um ponto de vista probabilístico, é preciso ter presente que qualquer que seja o modelo de resistência empregue, mais ou menos sofisticado, nunca será perfeito, isto é, nunca será capaz de prever os esforços resistentes reais, situação que se agrava se existir deterioração. Para cobrir as incertezas originadas pelos erros do modelo (desvio entre os valores preditos e os valores reais) e à semelhança da abordagem adoptada nos modelos estruturais, a resistência $R = R(X_1, \dots, X_n)$ predita pelo modelo deverá ser afectada por uma variável θ , adoptando-se geralmente a forma multiplicativa já apresentada anteriormente, isto é, a resistência a usar na verificação da segurança é dada por:

$$R' = \theta R, \quad (3.14)$$

Uma vez que os esforços resistentes admitem apenas valores do mesmo sinal, adopta-se geralmente para θ a distribuição Lognormal. O comportamento probabilístico da variável θ pode ser avaliado experimentalmente (ISO 2394, 1998). Com efeito, supondo que um programa experimental envolve a realização de k ensaios, conduzindo à obtenção de k resistências, a saber $R' = (R'_1, \dots, R'_k)$, e que os valores das correspondentes resistências preditas pelo modelo em estudo são $R = (R_1, \dots, R_k)$, a expressão $\theta = R'/R$ permite obter k valores de θ , que serão então analisados estatisticamente.

Não existindo informação específica a respeito da variável θ , pode recorrer-se a recomendações encontradas em bibliografia. A título de exemplo, apresenta-se na Tabela 3.7 as recomendações do *Probabilistic Model Code* (PMC) para estado limite último de flexão e estado limite último esforço transversal. Os valores constantes na Tabela 3.7, que se referem a estruturas de betão armado, deverão ser interpretados como meras indicações. Uma vez que a variável θ reflecte a confiança que se tem no modelo que estiver a ser utilizado, poderá ser ajustado de forma criteriosa caso a caso. Aliás é possível encontrar na bibliografia propostas significativamente diferentes das recomendadas pelo PMC (JCSS, 2001a). Wisniewski (2007) sintetiza algumas dessas propostas.

Tabela 3.7: Modelos probabilísticos para a variável θ —
incerteza nos modelos resistência (JCSS, 2001a).

Tipo de esforço resistente	Distribuição	Média	Cof. de var.
Flexão	Lognormal	1.20	0.15
Esforço transversal	Lognormal	1.40	0.25

3.8 Ensaios de carga

Os ensaios de carga (*load tests*) são usados com o objectivo de caracterizar o comportamento da estrutura como um todo e poderão ser propostos no âmbito da avaliação estrutural de uma ponte existente. Os ensaios de carga dividem-se em duas grandes categorias:

- 1) Ensaios de diagnóstico (*diagnostic load tests*) que incluem:
 - ensaios estáticos;
 - ensaios pseudo-dinâmicos;
 - ensaios dinâmicos.
- 2) Provas de carga (*proof load tests*).

Os ensaios de diagnóstico são realizados com cargas conhecidas e são usados com o objectivo de verificar se o comportamento actual da ponte está conforme com os resultados preditos pelo modelo numérico desenvolvido.

Os ensaios do tipo prova de carga são menos usuais e destinam-se a determinar a carga máxima que a ponte pode suportar sem sair do regime linear. Como é evidente, um ensaio deste tipo acarreta um risco elevado de introduzir danos na ponte, e por esse motivo só é realizado em casos excepcionais.

3.8.1 Ensaios de diagnóstico

Em alguns países da Europa, incluindo Portugal, é comum a realização de ensaios de diagnóstico após a construção de pontes importantes, antes da sua entrada em serviço. Tais ensaios permitem atestar perante o dono de obra (e o público em geral) a aptidão da ponte para entrada em serviço. Ensaios de diagnóstico com idêntica finalidade são também por vezes realizados antes ou após obras de reabilitação ou reforço importantes.

No âmbito das avaliações de pontes existentes, os ensaios de diagnóstico podem ser usados sempre que haja dúvidas sobre a adequação do modelo numérico desenvolvido. Algumas dessas dúvidas poderão relacionar-se com:

- valores das propriedades mecânicas dos materiais;
- condições fronteira, incluindo interacção solo-estrutura;
- influência de elementos secundários, como o tapete betuminoso, lancis e vigas de bordadura moldadas in-situ.
- efeitos estruturais não contabilizados, como o efeito de arco e efeito de membrana.

Os resultados do ensaio poderão detectar possíveis reservas de resistência não contabilizadas nos modelos numéricos (BA 21/01, 2001), embora se deva ter muito

cuidado para não confundir resistência com rigidez (Ryall, 2001), isto é, o facto de uma estrutura se revelar mais rígida do que o predito pelo modelo numérico, não significa que seja também mais resistente.

Como se disse acima, distinguem-se três tipos de ensaio de diagnóstico: ensaios estáticos; ensaios pseudo-dinâmicos e ensaios dinâmicos. Nos ensaios estáticos recorre-se a veículos com peso conhecido, criteriosamente posicionados no tabuleiro a fim de gerar esforços ou deslocamentos máximos nas secções críticas (em geral as secções de vão e apoio). O valor das cargas, assim como a sua posição, são definidos de forma a que os esforços provocados sejam representativos das cargas de serviço (SAMARIS, 2006b)[‡].

Nos ensaios pseudo-dinâmicos é usado um veículo que se move lentamente ao longo da ponte. O objectivo é determinar linhas de influência reais, a fim de serem comparadas com as correspondentes linhas de influência determinadas numericamente.

Nos ensaios dinâmicos usam-se acelerómetros criteriosamente posicionados ao longo da estrutura, os quais permitem medir a resposta da estrutura e determinar parâmetros dinâmicos, tais como frequências, configuração dos modos de vibração e coeficientes de amortecimento. Existem fundamentalmente três tipos de ensaio para caracterização dinâmica das estruturas (Rodrigues, 2005):

- 1) ensaios de vibração forçada, com controlo das forças de excitação;
- 2) ensaios em regime livre;
- 3) ensaios de caracterização dinâmica ambiental.

O primeiro tipo de ensaio é mais usual em estruturas de pequena dimensão, pois exige o uso de equipamentos geradores de vibrações que, no caso de pontes de dimensão apreciável, são dispendiosos e exigem uma logística pesada.

Nos ensaios em regime livre é imposto um deslocamento à estrutura, normalmente por meio de um cabo repentinamente libertado, medindo-se a resposta da estrutura após a libertação do cabo. Trata-se de um ensaio bastante adequado à avaliação dos coeficientes de amortecimento, embora os outros tipos também o permitam fazer.

No último tipo de ensaio, o mais usual em pontes, mede-se a resposta da estrutura às acções dinâmicas a que normalmente está sujeita: vento e tráfego. Trata-se de um ensaio mais simples do que os anteriores, pois não exige o uso de equipamento especial para introdução de forças de excitação. Além disso, o ensaio é realizado com

[‡] Embora não exista em Portugal nenhum documento oficial que fixe os procedimentos a adoptar em ensaios de carga, é usual usarem-se cargas que provocam na estrutura esforços da ordem dos 60% a 70% dos esforços característicos usados no projecto.

a ponte em serviço, o que é uma importante vantagem, pois não obriga ao encerramento temporário da ponte. Os métodos para determinação dos modos de vibração neste tipo de ensaio, usualmente designados por *métodos de identificação modal estocástica*, estão bem estabelecidos (Rodrigues, 2005).

3.8.2 Provas de carga

As provas de carga são realizadas sempre que se pretenda determinar por via experimental a sobrecarga máxima que uma ponte pode suportar em condições de segurança, isto é, sem que a ponte sofra danos, como por exemplo fissuração. Como se disse anteriormente, trata-se de um ensaio muito delicado devido ao perigo real de introduzir danos irreversíveis na estrutura.

No entanto, se realizados cuidadosamente, poderão ser úteis especialmente nos casos em que haja falta substancial de informação, como por exemplo em pontes antigas nas quais não existam nem projecto nem registos de obra, ou pontes com estrutura muito difícil de modelar numericamente, como pode acontecer com certas pontes antigas de alvenaria (SAMARIS, 2006b).

Uma outra situação adequada à realização de uma prova de carga surge quando o modelo analítico conduz a uma capacidade de carga inferior à requerida para a ponte em avaliação. O ensaio poderá despistar reservas de resistência e demonstrar que a capacidade de carga é superior à prevista pelo modelo de cálculo e superior à carga requerida (fib, 2003). Se tal acontecer, evitam-se gastos desnecessários com obras de reforço e o custo do ensaio é plenamente justificado. É claro que, antes da realização do ensaio, não há garantia que ele demonstre que a ponte tem capacidade de carga suficiente, de modo que a opção pela realização do ensaio deve ser criteriosamente ponderada.

O ensaio consiste em carregar a ponte com uma carga de valor crescente até que se observem sinais de comportamento não linear. O *Bulletin 22* da fib (fib, 2003) descreve vários sistemas para introdução de carga crescente. Recorrendo a instrumentação, a ponte é devidamente observada à medida que a carga aumenta, interrompendo-se o ensaio logo que se cumpra o critério de paragem previamente estabelecido.

Nivelamentos geométricos de precisão, realizados antes e após o ensaio, permitirão avaliar eventuais deformações residuais não recuperadas.

3.8.3 Actualização da fiabilidade estrutural com base num ensaio de carga

Os resultados dos ensaios de carga poderão ser usados para actualizar a fiabilidade da estrutura. Com efeito, após a realização com sucesso de um ensaio de carga (o ensaio foi realizado sem que se tivessem introduzidos danos na estrutura) fica demonstrado que a resistência dos elementos estruturais da ponte é superior aos esforços introduzidos nesses elementos durante a realização do ensaio. Tais esforços poderão ser usados para realizar um truncamento à esquerda nas distribuições de probabilidade das resistências (Melchers, 1999). A distribuição de probabilidade truncada é obtida por aplicação do teorema de Bayes, como se verá no próximo capítulo. A fiabilidade da estrutura pode então ser actualizada usando a distribuição de probabilidade truncada.

Faber *et al.* (2000) estudaram o problema da determinação do valor a usar no ensaio de carga de modo a garantir um índice de fiabilidade de 3.4 num período de 100 anos face à passagem da sobrecarga requerida para a ponte. Nesse estudo, foi também calculada a probabilidade de falha para a carga de ensaio calculada, tendo os autores concluído que essa probabilidade é em geral pequena (risco de introdução de danos relativamente baixo).

Gomez & Casas (2008) tratam de uma questão semelhante, isto é, a determinação do valor da carga que se deve adoptar no ensaio de forma a garantir que a ponte é capaz de suportar determinada sobrecarga (quantificada pelo valor característico) com uma certa fiabilidade durante um certo intervalo de tempo. Como é evidente, o ensaio permite dar essa garantia apenas se for realizado com sucesso, isto é, se não introduzir danos permanentes na estrutura.

3.9 Critérios de aceitação da fiabilidade para pontes existentes

Os princípios da verificação da segurança das estruturas foram discutidos no Capítulo 2, e em essência são os mesmos, quer se trate de estruturas novas, quer se trate de estruturas existentes. Em particular, a condição de segurança, quando expressa em termos de índice de fiabilidade estimado β e índice de fiabilidade-alvo β_T , dada por $\beta > \beta_T$, é a mesma. Contudo, poderão justificar-se diferenças ao nível dos valores da fiabilidade-alvo. De facto alguns países aceitam índices de fiabilidade inferiores para pontes existentes, como é o caso dos EUA e do Canadá. A razão prende-se essencialmente com questões de natureza económica. Uma vez que o custo marginal

de fiabilidade é superior em estruturas existentes, o índice de fiabilidade óptimo (numa perspectiva de minimização do custo generalizado) tende a reduzir-se.

Apesar de parecer existir uma tendência global para a aceitação desta ideia (Diamantidis & Bazzurro, 2007), a verdade é que não é universalmente seguida. Por exemplo, a ISO publicou duas normas, a ISO 2394 (1998) e a ISO 13822 (2001), a primeira vocacionada para estruturas novas e a segunda para estruturas existentes, e nelas recomenda exactamente os mesmos índices em ambas as situações.

Neste capítulo foram já apresentados alguns critérios de aceitação da fiabilidade especificamente para pontes existentes, nomeadamente os critérios utilizados no Canadá e na Dinamarca. No primeiro caso, como se viu, é feita uma diferenciação da fiabilidade bastante pormenorizada. Na Tabela 3.8 apresenta-se uma síntese das principais recomendações encontradas em alguns países e organizações (Casas *et al.*, 2008). Os valores constantes na Tabela referem-se a consequências normais de falha e fiabilidade ao nível do elemento. Conforme se observa, existem diferenças bastante significativas entre as diferentes recomendações, com valores de β a variar entre 2.5 e 4.7. A relação entre as probabilidades de falha correspondentes a esses dois índices é de aproximadamente 5000.

Tabela 3.8: Índice de fiabilidade objectivo, β_T , para estados limites últimos e período de referência 1 ano (Casas *et al.*, 2008).

	Canadá	EUA	Dinamarca	Eurocódigo	JCSS	ISO
Dimensionamento	3.75	3.75	4.2	4.7	4.2	4.7
Avaliação	3.25	2.5	4.2	-	-	4.7

Ao escolher-se um determinado índice de fiabilidade-objectivo para uma ponte existente, é importante ter presente o período de vida útil residual da ponte. Como é evidente, exige-se uma fiabilidade superior a uma estrutura que tenha de se manter em serviço por um período de tempo superior. Por exemplo, tomando como referência o valor $\beta_1 = 4.7$ recomendado pelo Eurocódigo (NP EN 1990, 2009), que é a única recomendação oficial europeia disponível actualmente, se se considerar que esse valor foi calibrado para uma vida útil de 50 anos, a que corresponde $\beta_{50} = 3.8$, então isto significa que 3.8 é a fiabilidade que a ponte deve ter até ao fim da sua vida. Assim, se for atribuída a uma ponte existente uma vida útil residual de apenas 1 ano, a fiabilidade mínima que a ponte tem de ter hoje é de 3.8 e não 4.7. Na maioria das vezes, porém, o período de vida residual é indefinido, pelo que deverá ser considerado igual ao adoptado para estruturas novas.

Refira-se que os valores constantes na Tabela 3.8 para o caso dos EUA foram calibrados para um período de vida útil coincidente com o período entre avaliações

sucessivas (entre 2 e 5 anos). Aqui o período de vida útil da ponte tem o sentido de período de exposição às acções. O raciocínio que se faz é o seguinte: se se souber à partida que a fiabilidade de uma ponte vai ser avaliada de 5 em 5 anos e que esta vai ser repostada caso se justifique, só há necessidade de garantir a fiabilidade por períodos de 5 anos. É claro que só se pode raciocinar desta forma se houver garantia de que a ponte vai ser avaliada efectivamente de 5 em 5 anos e que a fiabilidade vai ser repostada se as conclusões da avaliação assim o recomendarem.

Note-se que os índices de fiabilidade acima dizem respeito a verificações de segurança ao nível do elemento, e não ao nível do sistema (estrutura como um todo). Em alguns casos, se a fiabilidade ao nível do elemento não poder ser comprovada, poderá explorar-se a redundância (ou hiperstaticidade) da estrutura. Neste caso a condição de segurança passará a ser: $\beta_{sys} > \beta_{sys,T}$, onde o índice *sys* significa sistema. Como o colapso global de uma estrutura é mais grave que uma rotura local, a fiabilidade-alvo ao nível do sistema deverá ser superior. Consta-se, porém, que não existem Normas ou documentos-guia que façam uma distinção clara entre fiabilidade-objectivo ao nível do elemento e fiabilidade-objectivo ao nível do sistema (Wisniewski, 2007). No entanto, deve referir-se que no regulamento canadiano (CAN/CSA-S6-00, 2000) há uma diferenciação implícita relacionada com o comportamento do sistema. Observando a Tabela 3.1 constata-se que o índice de fiabilidade-alvo aumenta em 0.25 quando a rotura do elemento em análise implicar o colapso da estrutura.

Quando a verificação da segurança não poder ser comprovada (segundo os critérios de aceitação de fiabilidade previamente aceites), as decisões a tomar geralmente incluem uma ou mais entre as seguintes medidas possíveis (ISO 13822, 2001):

- 1) Aceitar a fiabilidade da estrutura com base numa avaliação de risco devidamente fundamentada.
- 2) Aceitar a fiabilidade, mas implementar um sistema de monitorização.
- 3) Implementar alguma forma de restrição de tráfego.
- 4) Reforçar a estrutura.
- 5) Demolir a estrutura e substituí-la por uma que satisfaça a segurança.

Em alguns casos poderá justificar-se proceder ao encerramento imediato da estrutura, sem prejuízo de outras medidas que venham a ser adoptadas posteriormente.

3.10 Considerações finais

Neste capítulo destacou-se a conveniência em distinguir dois tipos de avaliação de pontes existentes: avaliação de condição (verificação do desempenho da estrutura em relação aos requisitos de serviço e durabilidade) e avaliação estrutural (verificação do desempenho em relação ao requisito de segurança).

Um bom número de países, onde se inclui Portugal, já realiza avaliações do primeiro tipo com um grau razoável de desenvolvimento. O mesmo, porém, não se pode dizer em relação ao segundo tipo de avaliação. Com efeito, a maioria dos países realiza avaliações estruturais com base nos mesmos regulamentos usados no projecto de estruturas novas. Como se demonstrou, este procedimento não é satisfatório, dadas as importantes diferenças entre projectar uma estrutura nova e verificar a segurança de uma que já existe.

Como se viu, uma das diferenças tem a ver com os níveis de incerteza numa e noutra situação. Os coeficientes de segurança preconizados nos regulamentos estão calibrados para populações de estruturas relativamente vastas, reflectindo assim níveis apreciáveis de incerteza. Quando se avalia uma estrutura existente particular, muitas das incertezas iniciais podem ser reduzidas, tornando os regulamentos para estruturas novas demasiado conservativos. Por exemplo, a dispersão das resistências dos materiais empregues pode ser bastante mais pequena que a dispersão implícita nos coeficientes de segurança preconizados nesses regulamentos. Também as acções poderão diferir de estrutura para estrutura, consoante a sua localização, e ser mais baixas que as previstas nos regulamentos, como é o caso das sobrecargas rodoviárias.

Para modelar consistentemente as incertezas num processo de avaliação estrutural dispõe-se da teoria das probabilidades, e em particular a teoria da fiabilidade estrutural. Por isso, não admira que a tónica dominante nos países com maior desenvolvimento na área das avaliações de pontes existentes seja o recurso a metodologias probabilísticas (Lauridsen *et al.*, 2007). Uma análise probabilística conduz a estimativas de fiabilidade mais realistas, que poderão ser superiores às estimativas que se obtêm empregando os critérios tradicionais de segurança, o que, em alguns casos, poderá evitar o dispêndio de fundos em trabalhos de reforço. Os fundos poupados poderão então ser empregues de forma mais eficiente em trabalhos de manutenção, ou no reforço de outras obras mais carenciadas.

Ficaram também patentes os benefícios de se avaliar a segurança de uma ponte existente por etapas de complexidade crescente, passando-se à fase seguinte somente quando a verificação da segurança não for satisfeita na fase anterior. Isto permite gerir de forma mais eficiente os recursos disponíveis.

Abordaram-se alguns aspectos relacionados com a modelação probabilística de acções, modelação da estrutura e modelação de resistências.

Por fim apresentaram-se alguns critérios de aceitação de fiabilidade usados em diferentes países e recomendados por diferentes organizações. Conforme se viu, existem diferenças muito significativas nesses critérios, o que demonstra a necessidade de trabalho de investigação que conduza a uma uniformização de critérios.

Capítulo 4

Abordagem Bayesiana — fundamentos

4.1 Considerações iniciais

Os conceitos base do paradigma Bayesiano foram introduzidos no Capítulo 2 quando se analisou o significado da probabilidade de falha, tendo-se chamado a atenção que essa probabilidade, devido à presença de incertezas do tipo epistémico, não deve ser interpretada como frequência de colapsos. O presente Capítulo desenvolve estes conceitos e apresenta outros conceitos fundamentais, incluindo o Teorema de Bayes, que desempenha um papel fundamental em todo o paradigma. Os assuntos serão desenvolvidos de modo a realçar a capacidade da abordagem Bayesiana em modificar distribuições de probabilidade sempre que novas informações se tornem disponíveis. Desenvolve-se um algoritmo que implementa, via método de Monte Carlo, o mecanismo de actualização Bayesiana quando a informação nova é do tipo amostral.

A interpretação Bayesiana de probabilidade encontra uma aplicação muito importante em problemas de decisão sob cenários incertos. Uma vez que no âmbito da avaliação da segurança de pontes existentes surgem frequentemente situações em que é necessário tomar decisões, faz-se uma breve descrição da chamada teoria da Decisão Bayesiana e ilustra-se a aplicação da teoria a um problema concreto com interesse em avaliações estruturais.

4.2 Interpretação Bayesiana do conceito de probabilidade

A abordagem Bayesiana baseia-se numa interpretação de probabilidade que se distancia substancialmente da interpretação frequencista usada na Estatística Clássica. Antes de se analisar mais em pormenor em que consiste tal interpretação, julga-se oportuno rever as diferentes interpretações do conceito de probabilidade. Podem identificar-se fundamentalmente três interpretações do conceito.

Em primeiro lugar, há a chamada interpretação clássica, a qual afirma que se um acontecimento poder ocorrer de n modos distintos e igualmente prováveis e se n_A desses modos possuírem o atributo A , então a probabilidade de ocorrência de A , representada por $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}. \quad (4.1)$$

Embora intuitiva, esta interpretação é bastante restritiva. Com efeito, pressupõe que a experiência em estudo tenha um número finito de possibilidades de ocorrência e igual probabilidade de cada ocorrência.

Em segundo lugar, há a chamada interpretação frequencista que dominou claramente a primeira metade do século XX e que identifica a probabilidade com a frequência relativa de um acontecimento. Esta interpretação é baseada no princípio da regularidade estatística, segundo o qual, quando o número de repetições de uma experiência aleatória aumenta e a experiência é realizada nas mesmas condições, a frequência relativa de um determinado acontecimento tende a estabilizar (Murteira *et al.*, 2008), dando origem à definição de probabilidade do evento A por meio do limite:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}, \quad (4.2)$$

onde n é o número total de repetições da experiência e n_A o número de vezes que o acontecimento A ocorre nessas n repetições. Esta interpretação, embora resolva as limitações da interpretação clássica, apresenta ainda uma limitação importante: pressupõe que a experiência em estudo seja repetível e nem todos os fenómenos são passíveis de repetição, e mesmo os que o são nem sempre se repetem nas mesmas condições. Por exemplo, suponha-se que se deseja estimar a probabilidade de uma determinada ponte colapsar. Ora, se essa ponte colapsar, isso só acontece uma vez, não sendo por isso uma experiência repetível. Por outro lado, mesmo que se argumentasse que as n repetições da experiência se identificam com a observação de n pontes semelhantes (durante um certo período de tempo), mesmo assim surgiria a dificuldade do cumprimento do requisito de que a experiência tem de ser realizada em

condições semelhantes, dado que não existem duas pontes iguais e sujeitas exactamente às mesmas condições.

Por fim, há a interpretação Bayesiana, segundo a qual a probabilidade de um acontecimento deve ser encarada simplesmente como uma *medida na escala entre 0 e 1 da confiança* que se tem numa eventual ocorrência desse acontecimento, independentemente de ser repetível ou não. Esta confiança, ou grau de certeza, depende fundamentalmente do nível de informação que se tem a respeito desse acontecimento, que pode ser maior ou menor, e não tanto do acontecimento em si. Esta interpretação, como medida de confiança condicionada à informação disponível, é frequentemente referida como interpretação subjectiva ou personalista (Paulino *et al.*, 2004). A probabilidade é sempre condicional à informação que se dispõe do acontecimento em apreço e, evidentemente, é susceptível de ser alterada (ou actualizada) sempre que surjam novas evidências e novas informações que modifiquem as expectativas que se tinha inicialmente. Assim, como diz Bernardo (2009), não existem probabilidades absolutas.

Esta interpretação é substancialmente diferente da interpretação frequencista, que tende a interpretar a probabilidade em sentido absoluto, definindo inclusivamente probabilidade por meio de uma equação matemática específica (Eq. (4.2)). Note-se, no entanto, que a informação disponível pode basear-se mais ou menos em dados empíricos, dependendo se estão ou não disponíveis, e, neste sentido, pode afirmar-se que a interpretação Bayesiana engloba a interpretação frequencista como um caso particular (Hahn & Shapiro, 1994). De facto, se se analisar experiências repetíveis e se existirem dados em número suficiente relativos a essa experiência, pode fundamentar-se a atribuição de uma probabilidade (como medida de confiança) com base numa frequência relativa. O problema é que esses dados nem sempre existem e, como se disse, nem todas as experiências são repetíveis.

Deve notar-se que esta interpretação está inteiramente em harmonia com o uso diário que em geral as pessoas fazem da palavra probabilidade (Bernardo, 2009), mesmo aquelas que não têm conhecimento matemático da teoria das probabilidades*.

As bases para esta interpretação de probabilidade foram lançadas aquando da publicação em 1763, a título póstumo, da obra *An Essay Towards Solving a Problem*

* Com efeito, às vezes, ouve-se alguém dizer: «isso é pouco provável que aconteça». Esta expressão reflecte a confiança que essa pessoa tem numa eventual ocorrência desse acontecimento. Esta pessoa está a afirmar que não sabe se o acontecimento em questão vai acontecer ou não, mas ficará mais surpreendida se acontecer do que se não acontecer. Se se pedir a essa pessoa que expresse a sua confiança numa escala entre 0 e 1, explicando-lhe que a probabilidade 0 indica que tem a certeza que tal acontecimento não ocorre e que a probabilidade 1 indica que tem a certeza que o acontecimento ocorre, é possível que ela o consiga fazer.

in the *Doctrine of Chances* da autoria do reverendo Thomas Bayes. Laplace em 1812 também usou o conceito de probabilidade com idêntica interpretação e é justo considerá-lo também como um dos fundadores da teoria Bayesiana. Contudo, foi já em pleno século XX que esta interpretação, junto com as suas aplicações à estatística, ganhou solidez, muito em especial devido aos contributos de estatísticos tais como, de Finetti, Jeffreys, Savage (1972) e Lindley, entre outros.

Visto que não é adequado definir probabilidade por meio de uma equação matemática directa, surge o problema da definição rigorosa do conceito de forma a ser possível construir uma teoria lógica e consistente para o cálculo de probabilidades. Os matemáticos resolveram o problema definindo o conceito de forma axiomática, isto é, introduziram o conceito através das propriedades (chamados axiomas) que tem de satisfazer. Recorde-se, então, os três axiomas, conhecidos como axiomas de Kolmogorov, que constituem a base para a construção de toda a teoria matemática das probabilidades.

Seja S um espaço amostral, isto é, o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência. Seja A um evento qualquer desse espaço amostral. Chama-se probabilidade de A , representada por $P(A)$, ao número real que satisfaz os seguintes axiomas [†]:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 2) $P(S) = 1$.
- 3) Se A e B forem dois acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos, isto é, acontecimentos que não podem ocorrer simultaneamente, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

O primeiro axioma afirma que a probabilidade é um número real compreendido entre 0 e 1. O segundo afirma que o espaço amostral é um acontecimento certo, isto é, se a experiência for realizada, pelo menos um acontecimento do espaço amostral ocorre. O terceiro axioma afirma que as probabilidades são aditivas. Note-se que estes axiomas, que se aceitam sem discutir, constituem propriedades do conceito de frequência relativa, sendo por isso intuitivos.

Visto que os acontecimentos podem ser interpretados como subconjuntos de um conjunto maior, o espaço amostral, a probabilidade pode ser vista como uma função de conjunto — uma função que atribui a cada acontecimento um número real compreendido entre 0 e 1, que, como se disse, mede a confiança (ou grau de certeza) que se tem a respeito da possibilidade de ocorrência desse acontecimento. As probabilidades $p = 0$ e $p = 1$ correspondem às duas situações extremas em que não

[†] Aqui poder-se-ia acrescentar: «e que mede a confiança que se tem numa eventual ocorrência de A »

há incerteza: probabilidade nula indica não ocorrência certa e probabilidade unitária indica ocorrência certa. A probabilidade $p = 0.5$ corresponde à incerteza máxima e indica que não se tem nenhuma inclinação quer no sentido da não ocorrência quer no sentido da ocorrência do acontecimento.

Deve notar-se que a interpretação Bayesiana de probabilidade (como medida de confiança ou de certeza) é compatível com experiências que não sejam aleatórias por inerência. Por exemplo, suponha-se que se deseja medir a altura do pilar de uma ponte existente. Ora, a altura do pilar não é em si mesma uma variável aleatória, visto que o valor da altura, embora desconhecido, é uma quantidade fixa. Acontece, porém, que sucessivas medições da altura desse pilar conduzem sistematicamente a valores diferentes, originando incerteza a respeito do verdadeiro valor da altura do pilar. Se se interpretar a probabilidade de um ponto de vista Bayesiano, faz sentido modelar a incerteza na altura do pilar por meio de uma distribuição de probabilidade.

Como referido no Capítulo 2, consoante a sua origem, as incertezas podem ser agrupadas em duas grandes categorias: a chamada incerteza aleatória (originada em experiências puramente aleatórios) e a chamada incerteza epistémica (originada na falta de conhecimento a respeito de determinada experiência). A teoria Bayesiana assenta no seguinte princípio fundamental: toda a incerteza, seja do tipo aleatório, seja do tipo epistémico, deverá ser descrita por meio de distribuições de probabilidade (Paulino *et al.*, 2003). Bernardo (2009) refere: *A central element of Bayesian paradigm is the use of probability distributions to describe all relevant unknown quantities, interpreting the probability of an event as a conditional measure of uncertainty, on a $[0,1]$ scale (...)*.

Ou seja, toda a incerteza, mesmo a que não for de origem intrinsecamente aleatória, deverá ser modelada como variável aleatória, caracterizada por uma determinada distribuição de probabilidade. Por exemplo, a altura do pilar mencionado acima, à luz do paradigma Bayesiano, é modelada como variável aleatória. A distribuição de probabilidade atribuída a essa variável simplesmente caracteriza a incerteza que se tem a respeito do seu verdadeiro valor. O verdadeiro valor de uma grandeza fixa mas desconhecida é muitas vezes mencionado como *estado da natureza*, que, por ser desconhecido, faz sentido atribuir-lhe uma probabilidade — como medida condicional de incerteza.

Considere-se outro exemplo. Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma ponte existente e, especificamente, deseja-se determinar a probabilidade de ser excedida a resistência à flexão numa determinada secção da ponte. Uma variável importante do problema é a área da armadura de flexão nessa secção, ou, de forma equivalente, o seu diâmetro. Ora, o diâmetro das armaduras na referida secção é uma

quantidade fixa. Contudo, o seu valor é desconhecido, mesmo que se conheça o tipo de armadura empregue, não só porque são perfeitamente naturais pequenas variações decorrentes do processo de fabrico, mas também pelo facto de, supondo que existe corrosão activa, não se saber em que medida a corrosão afectou o diâmetro. Assim, a atribuição de uma distribuição de probabilidade ao diâmetro das referidas armaduras não significa que se está a afirmar que tal quantidade é uma variável aleatória (pois é uma quantidade fixa), mas surge como medida natural e lógica de caracterizar a incerteza a respeito do seu verdadeiro valor (estado da natureza).

Um exemplo típico de grandezas que, não sendo inerentemente aleatórias, podem ser modeladas como variáveis aleatórias, são os parâmetros das distribuições de probabilidade. Como os verdadeiros valores não são em geral conhecidos, então, à luz do paradigma Bayesiano, os parâmetros são modelados como variáveis aleatórias, com as correspondentes distribuições de probabilidade. Este assunto, com enormes reflexos na inferência estatística, constitui a essência da chamada Estatística Bayesiana.

4.3 Conceitos fundamentais de probabilidade

A atribuição de uma probabilidade a um acontecimento, ou a um estado desconhecido da natureza, está sempre condicionada à informação disponível relativa à experiência em questão. Por isso, não admira que um dos conceitos probabilísticos mais importantes seja o conceito de probabilidade condicionada. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência incerta (não necessariamente aleatória). Define-se probabilidade de A dada a ocorrência de B à quantidade:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (4.3)$$

A probabilidade $P(A | B)$ é a probabilidade de A em relação ao espaço amostral reduzido B , entendendo-se B como subconjunto do espaço amostral da experiência em questão. Se se entender B como novo espaço amostral, então, por força do segundo axioma de probabilidade $P(B | B)$ tem de ser igual a 1. E de facto é, pois, recorrendo à definição acima:

$$P(B | B) = P(B \cap B) / P(B) = P(B) / P(B) = 1$$

o que sugere a total consistência entre a definição de probabilidade condicionada e os axiomas de probabilidade.

À luz dessa definição, toda a probabilidade é, em certo sentido, condicionada. Na verdade, quando se escreve $P(A)$ poderia escrever-se $P(A | S)$, sendo S o espaço amostral da experiência em consideração. Os acontecimentos A e $A | S$ são

exactamente os mesmos, tendo assim, a mesma probabilidade. Com efeito, tem-se (Ang & Tang, 2007):

$$P(A | S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)}{1} = P(A).$$

Por definição de probabilidade condicionada pode também escrever-se:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (4.4)$$

Juntando as Eqs. (4.3) e (4.4), resulta:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}, \quad (4.5)$$

que constitui uma das formas de apresentação do teorema de Bayes e mostra que a simples ocorrência de B modifica a probabilidade de A , que era $P(A)$ e passou a ser $P(A | B)$. Isto confirma o que se disse anteriormente de que a probabilidade dum acontecimento não deve ser encarada em sentido absoluto, pois é susceptível de ser modificada sempre que surjam novos dados. A probabilidade $P(A)$ é muitas vezes designada probabilidade *a priori* e mede a incerteza prévia ou inicial que se tinha a respeito do acontecimento A . A probabilidade $P(A | B)$, frequentemente chamada probabilidade *a posteriori*, mede a incerteza que se passa a ter depois de se observar a ocorrência de B . O teorema de Bayes constitui assim um mecanismo formal de alteração de probabilidades face a novas evidências ou novas informações. Note-se que a incerteza *a posteriori* pode aumentar ou diminuir: diminui quando $P(A | B)$ se aproxima de 0 ou 1, e aumenta quando se aproxima de 0.5.

Da definição de probabilidade condicionada obtém-se imediatamente o chamado *teorema da multiplicação das probabilidades*:

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A). \quad (4.6)$$

Recorda-se agora o chamado *teorema da probabilidade total*. Seja B_1, \dots, B_k uma partição do espaço amostral S , isto é, $\sum_{i=1}^k P(B_i) = 1$. Seja A um acontecimento qualquer. Então,

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A | B_i)P(B_i). \quad (4.7)$$

Este teorema pode ser demonstrado recorrendo ao diagrama de Venn. O teorema de Bayes pode então reescrever-se com a seguinte forma:

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A | B_i)P(B_i)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.8)$$

Recorda-se que dois acontecimentos dizem-se estatisticamente independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (4.9)$$

Comparando esta expressão com a Eq. (4.6), conclui-se que a independência entre A e B significa que $P(A | B) = P(A)$ e que $P(B | A) = P(B)$, ou seja, quando dois acontecimentos são independentes, o conhecimento de que um deles ocorreu em nada altera a probabilidade de ocorrência do outro. Os acontecimentos dizem-se, por isso, estatisticamente independentes. No texto que segue, sempre que, por simplicidade, se usar a expressão «acontecimentos independentes» quer dizer-se «acontecimentos estatisticamente independentes».

4.4 Teorema de Bayes e distribuições de probabilidade

A presente secção será desenvolvida de forma semelhante à secção anterior, com a diferença que, em vez de se lidar com os acontecimentos A e B e respectivas probabilidades, lidar-se-á com as variáveis X e Y , e correspondentes distribuições de probabilidade. Considere-se então o vector aleatório (X, Y) com distribuição de probabilidade conjunta $f_{XY}(x, y)$. Recorde-se que esta função, para o caso em que X e Y são variáveis contínuas, é definida tal que:

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x, y) dx dy, \quad (4.10)$$

onde A representa uma região qualquer do espaço bidimensional. Quando não houver perigo de confusão a respeito de que variáveis se refere a função distribuição conjunta, esta será representada simplesmente por $f(x, y)$.

A distribuição de probabilidade conjunta contém toda a informação probabilística das variáveis X e Y , incluindo suas relações de dependência estatística. As distribuições de probabilidade das variáveis X e Y , quando consideradas individualmente, designam-se por distribuições de probabilidade marginais e são definidas pelas expressões:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \quad (4.11)$$

Novamente, quando não existir perigo de confusão, as distribuições $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ serão representadas por $f(x)$ e $f(y)$, respectivamente. As distribuições marginais

podem assim ser extraídas da distribuição conjunta, mas o contrário não é, em geral, possível. No caso de X e Y serem variáveis discretas, a definição de probabilidade marginal é inteiramente semelhante, substituindo o integral por um somatório:

$$f_X(x) = \sum_{\text{todo } y} f(x, y) \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \sum_{\text{todo } x} f(x, y), \quad (4.12)$$

onde $f(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$, mais usualmente escrita como $P(X = x, Y = y)$.

A distribuição de X dado $Y = y$, representada por $f_{X|Y}(x|y)$ ou mais simplesmente por $f(x|y)$, designada distribuição condicionada de X dado $Y = y$, é definida por:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}, \quad (4.13)$$

e, da mesma forma, a distribuição de Y condicionada a $X = x$, é definida por:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}. \quad (4.14)$$

Note-se que as distribuições condicionadas conforme definidas pelas equações acima são verdadeiras distribuições de probabilidade, isto é, o integral da função densidade de probabilidade ao longo do seu domínio é unitário. Com efeito, tomando como exemplo a Eq. (4.13), tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f(y)} dx = \frac{1}{f(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{f(y)}{f(y)} = 1.$$

Das definições acima obtém-se imediatamente o teorema da multiplicação de probabilidades (aplicado a densidades):

$$f(x, y) = f(x|y)f(y) = f(y|x)f(x). \quad (4.15)$$

Frequentemente as distribuições de probabilidade condicionadas são mais fáceis de caracterizar do que a distribuição conjunta, pois correspondem a espaços amostrais reduzidos. O teorema da multiplicação das probabilidades mostra que se for conhecida a distribuição condicionada de uma das variáveis em relação à outra e a distribuição marginal desta última, fica definida a distribuição conjunta, dada pelo produto dessas distribuições.

Se se juntar a definição de probabilidade marginal, Eq. (4.11), com o teorema da multiplicação das probabilidades, Eq. (4.15), obtém-se o chamado teorema da probabilidade total (aplicado a densidades):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)f(y) dy, \quad (4.16)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y | x) f(x) dx. \quad (4.17)$$

Quando uma distribuição $f(x)$ resulta duma integração com a forma (4.16) diz-se que tal distribuição é uma mistura entre a distribuição $f(x | y)$ e $f(y)$.

O teorema de Bayes, na sua versão aplicada a densidades, é agora fácil de estabelecer. Com efeito, partindo da definição de probabilidade condicionada, tem-se:

$$f(x | y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{f(y | x) f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f(x | y) = \frac{f(y | x) f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y | x) f(x) dx}, \quad (4.18)$$

e, da mesma forma,

$$f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{f(x | y) f(y)}{f(x)} \Leftrightarrow f(y | x) = \frac{f(x | y) f(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x | y) f(y) dy}. \quad (4.19)$$

A distribuição $f(x)$ na Eq. (4.18) é designada distribuição *a priori* e a distribuição $f(x | y)$, que resultou da observação $Y = y$, é designada distribuição *a posteriori*, ou distribuição actualizada. O teorema de Bayes permite, pois, actualizar distribuições de probabilidade quando observações relevantes se tornam disponíveis.

No caso de variáveis discretas o teorema de Bayes é estabelecido de forma semelhante. Por exemplo, suponha-se que se deseja calcular $P(X = x | Y = y)$. Neste caso, basta considerar os acontecimentos $A = \{X = x\}$ e $B = \{Y = y\}$ e aplicar os resultados da secção anterior:

$$\begin{aligned} P(X = x | Y = y) &= \frac{P(Y = y | X = x) P(X = x)}{P(Y = y)} = \\ &= \frac{P(Y = y | X = x) P(X = x)}{\sum_{\text{todo } x} [P(Y = y | X = x) P(X = x)]}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

que se pode escrever numa notação mais compacta:

$$f(x | y) = \frac{f(y | x) f(x)}{\sum_{\text{todo } x} [f(y | x) f(x)]}, \quad (4.21)$$

e que é inteiramente semelhante à Eq. (4.18), onde o integral foi substituído por um somatório.

O teorema de Bayes também se generaliza facilmente a outras situações. Por exemplo, suponha-se que a variável X possui distribuição de probabilidade $f(x)$ e que se observou o acontecimento A . Então, a distribuição de probabilidade actualizada de X , representada por $f(x | A)$, é dada por:

$$f(x | A) = \frac{P(A | X = x)f(x)}{P(A)}. \quad (4.22)$$

Recorda-se agora o conceito de variáveis independentes, conceito paralelo ao conceito de acontecimentos independentes. As variáveis X e Y dizem-se independentes quando a distribuição conjunta for igual ao produto das distribuições marginais, isto é:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \Leftrightarrow f(x, y) = f(x)f(y). \quad (4.23)$$

É fácil verificar que a independência entre X e Y , definida pela Eq. (4.23), implica que $f(x | y) = f(x)$ e que $f(y | x) = f(y)$, isto é, quando duas variáveis são independentes, o conhecimento do valor de uma em nada altera a distribuição de probabilidade da outra.

Compare-se agora (4.23) com (4.15). Observa-se que nesta equação aparece o produto de duas distribuições: $f(y | x)$ com $f(x)$. Verifica-se assim que a variável $Y | X$ é independente da variável X . Por um raciocínio semelhante verifica-se que as variáveis $X | Y$ e Y são independentes entre si. Este conceito é vulgarmente conhecido como conceito de *independência condicional*. Em resumo, a Eq. (4.15) mostra que duas variáveis X e Y quaisquer são sempre condicionalmente independentes entre si.

4.5 Actualização de modelos probabilísticos

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória pode ser actualizada sempre que surja alguma informação relevante. Vão distinguir-se três situações. Uma surge quando a nova informação é do tipo amostral, isto é, quando se observou a amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ da variável X e se deseja actualizar a sua distribuição de probabilidade. Outra situação surge quando a nova informação é da forma $X \geq a$, ou $X \leq b$. Finalmente a terceira situação surge quando se deseja actualizar a distribuição de uma variável a partir da observação de uma outra variável que com ela esteja correlacionada. Em todas estas situações o teorema de Bayes constitui a base para a actualização.

4.5.1 Actualização de modelos probabilísticos quando a informação nova é do tipo amostral

Considere-se uma variável aleatória X contínua com FDP $f(x | \theta)$, em que θ representa o parâmetro da distribuição, ou o vector de parâmetros, caso exista mais do que um. Assim, se a distribuição for multiparamétrica, θ deve ser visto como um

vector, isto é, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$. No que segue irá usar-se a expressão singular «parâmetro θ », ficando entendido que a expressão pode referir-se, não necessariamente a um escalar, mas ao vector dos parâmetros se $f(x|\theta)$ for um modelo multiparamétrico.

Em geral o parâmetro θ não é conhecido com precisão, visto que é estimado a partir de amostras que não esgotam a população donde são extraídas. Duas amostras da mesma população conduzem invariavelmente a estimativas diferentes do parâmetro, originando incerteza a respeito do seu verdadeiro valor. Por conseguinte, à luz do paradigma Bayesiano, o parâmetro θ deve ser modelado como variável aleatória com a correspondente distribuição de probabilidade associada. Não que θ seja uma variável aleatória no sentido comum do termo, pois θ , embora desconhecido, possui um valor fixo — e daí a expressão «verdadeiro valor de θ ». Como explicado anteriormente, a atribuição de uma distribuição de probabilidade a θ é simplesmente uma forma conveniente de caracterizar a incerteza que se tem a respeito do seu valor. A incerteza em θ é vulgarmente designada incerteza estatística. A modelação de θ como variável aleatória constitui o ingrediente básico da chamada Estatística Bayesiana e torna possível a actualização da distribuição de X à luz da observação da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$.

O vector (X, θ) constitui assim um par aleatório, cuja distribuição conjunta será representada por $f(x, \theta)$. A distribuição marginal de X será representada por $f(x)$ e a marginal de θ por $f(\theta)$. Vai assumir-se que a variável θ é uma variável contínua, pois esta é a situação mais comum. No entanto, os resultados apresentados de seguida seriam inteiramente semelhantes para o caso de θ ser discreto. Com efeito, onde aparece $f(\theta)$ apareceria $f(\theta_i) = P(\theta = \theta_i)$ e onde aparece $\int \dots f(\theta) d\theta$ apareceria $\sum_i \dots f(\theta_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

A distribuição de θ condicionada à observação $X = x_1$ é, de acordo com o teorema de Bayes (Eq. (4.18)):

$$f(\theta | x_1) = \frac{f(x_1 | \theta)f(\theta)}{f(x_1)} = \frac{f(x_1 | \theta)f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 | \theta)f(\theta)d\theta} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 | \theta)f(\theta)d\theta \right]^{-1} f(x_1 | \theta)f(\theta).$$

Esta expressão pode ser interpretada assim: supõe-se conhecida a distribuição $f(\theta)$, designada distribuição *a priori* de θ . Entretanto observou-se $X = x_1$. Uma vez conhecida esta observação, o teorema de Bayes permite actualizar a distribuição $f(\theta)$, transformando-a na distribuição $f(\theta | x_1)$, designada distribuição *a posteriori*. Note-se que o factor $\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 | \theta)f(\theta)d\theta \right]^{-1}$ é uma constante, podendo assim ser encarado como um factor de normalização, isto é, um factor de forma a que o integral da distribuição *a posteriori* seja unitário. Por esta razão, é usual escrever-se:

$$f(\theta | x_1) \propto f(x_1 | \theta) \cdot f(\theta), \quad (4.24)$$

onde o símbolo \propto indica proporcionalidade.

Suponha-se agora que, depois de se observar $X = x_1$, observou-se $X = x_2$. Então, considerando que $f(\theta | x_1)$ é agora a distribuição *a priori*, uma segunda aplicação do teorema de Bayes conduz a $f(\theta | x_1, x_2) \propto f(x_2 | \theta)f(\theta | x_1)$. Mas $f(\theta | x_1)$ é dada por (4.24), donde

$$f(\theta | x_1, x_2) \propto f(x_2 | \theta) \cdot f(x_1 | \theta) \cdot f(\theta).$$

Este resultado é facilmente generalizável ao caso em que se observou a amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$. Neste caso a distribuição *a posteriori* de θ , é dada por:

$$f(\theta | \varepsilon) \propto \left[\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \right] f(\theta). \quad (4.25)$$

A expressão entre parêntesis rectos é a função verosimilhança (verosimilhança da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$) em geral representada por $L(\theta | x_1, \dots, x_n)$, ou mais abreviadamente $L(\theta | \varepsilon)$. Assim, (4.25) pode ser escrita na forma:

$$f(\theta | \varepsilon) \propto L(\theta | \varepsilon)f(\theta). \quad (4.26)$$

Note-se que, se a distribuição de X depender de dois parâmetros, caso em que $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, a Eq. (4.26) pode ser apresentada com o seguinte formato:

$$f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) \propto L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)f(\theta_1, \theta_2), \quad (4.27)$$

onde $L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1, \theta_2)$, e $f(\theta_1, \theta_2)$ e $f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$ representam, respectivamente, as distribuições conjuntas *a priori* e *a posteriori*.

Assim, quando uma amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ se torna disponível, o teorema de Bayes permite actualizar a distribuição *a priori* do parâmetro. A distribuição *a priori* contém a informação anterior sobre o parâmetro e a função verosimilhança extrai da amostra a informação relevante para esse parâmetro. O produto da função verosimilhança pela distribuição *a priori*, devidamente normalizado, constitui a distribuição *a posteriori*.

Observa-se assim que, para obter a distribuição *a posteriori*, é necessária uma distribuição *a priori*. Naturalmente, surge a questão de como especificar a distribuição $f(\theta)$, a fim de se aplicar a Eq. (4.26), nos casos em que a informação anterior não é relevante ou é escassa. Nesses casos, usa-se para $f(\theta)$ uma distribuição do tipo não informativo (Paulino *et al.*, 2003). Quando se usa para $f(\theta)$ uma distribuição não informativa, significa que $f(\theta | \varepsilon)$ contém essencialmente a informação da amostra ε .

Podem enumerar-se várias situações que conduzem ao uso de distribuições *a priori* não informativas. Uma situação surge naturalmente quando efectivamente não existe informação anterior relevante (anterior em relação à observação da amostra). Outra surge quando tal informação existe mas é subjectiva e pretende-se incluir na análise apenas informação objectiva, como a contida na amostra. Bernardo (2009) chama a esta análise, análise Bayesiana objectiva. Também se pode recorrer a uma distribuição não informativa quando se deseja comparar os resultados da Estatística Bayesiana com os resultados da Estatística Clássica que só usa informação amostral.

Diferentes teorias têm surgido com respeito ao estabelecimento das distribuições não informativas. Paulino *et al.* (2003) contém uma boa síntese de modelos propostos por diferentes autores. Entre esses modelos, as chamadas distribuições de Jeffreys têm gozado de ampla aceitação. No domínio das distribuições não informativas merece também referência a investigação conduzida por José Bernardo (Bernardo & Smith, 1994), que desenvolveu uma teoria para o estabelecimento de distribuições não informativas, a que chamou de análise de referência. O autor partiu da ideia de que a distribuição não informativa deve ter o menor impacto possível na distribuição *a posteriori*. Refira-se que as distribuições de referência de Bernardo coincidem em muitas situações com as distribuições de Jeffreys.

Deve-se salientar, no entanto, que a designação «distribuições não informativas» pode transmitir a ideia de que tais distribuições não contêm nenhuma informação. Embora o objectivo seja que tais distribuições tenham o menor impacto possível na distribuição *a posteriori*, a verdade é que tais distribuições sempre contêm alguma informação. Assim, à luz deste comentário, uma designação porventura mais adequada seria «distribuições pouco informativas».

Se se desejar incluir na análise qualquer informação anterior relevante, como pode suceder quando existe experiência anterior acumulada, é usual materializar essa informação numa distribuição $f(\theta)$ tal que $f(\theta | \varepsilon) \propto L(\theta | \varepsilon)f(\theta)$ seja da mesma família que $f(\theta)$. Diz-se que essa família é a *conjugada natural* do modelo $f(x | \theta)$.

Conhecida a distribuição *a posteriori* do parâmetro (ou dos parâmetros, se existir mais do que um) podem fazer-se sem dificuldade quaisquer inferências pretendidas. Por exemplo, uma estimativa razoável para o verdadeiro valor de θ é o respectivo valor esperado, dado por:

$$1) \text{ valor esperado } a \text{ priori: } \hat{\theta} = E(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta) d\theta; \quad (4.28)$$

$$2) \text{ valor esperado } a \text{ posteriori: } \hat{\theta} | \varepsilon = E(\theta | \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | \varepsilon) d\theta. \quad (4.29)$$

Estes estimadores designam-se por estimadores Bayesianos.

Um intervalo de confiança correspondente a um nível de confiança γ é um intervalo da forma:

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] : P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = \gamma. \quad (4.30)$$

Naturalmente existe uma infinidade de intervalos $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ com aquele nível de confiança. Entre estes, dois são frequentemente utilizados. Um deles é o chamado intervalo HPD (*High Probability Density*) ou intervalo com densidade de probabilidade máxima. Pode-se demonstrar que o intervalo HPD é o intervalo de menor comprimento para uma dada confiança (Paulino *et al.*, 2003). Outro intervalo também frequentemente utilizado é o chamado intervalo centrado, ou de abas iguais. É o intervalo $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ tal que $F_\theta(\hat{\theta}_1) = 1 - F_\theta(\hat{\theta}_2) = (1 - \gamma) / 2$. Naturalmente se $f(\theta)$ for uma distribuição simétrica, os intervalos HPD e centrado coincidem. A Figura 4.1 ilustra a definição destes intervalos.

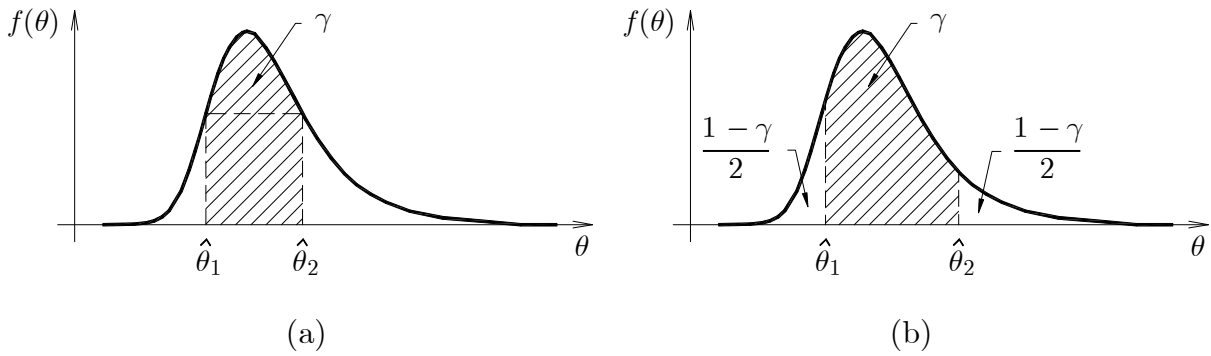


Figura 4.1: Intervalos de credibilidade: HPD (a) e centrado (b).

Pode também estabelecer-se um intervalo de confiança semi-infinito. Por exemplo, suponha-se que se deseja uma estimativa de θ para a qual se tenha uma confiança γ de que o verdadeiro valor de θ esteja acima dessa estimativa. Se se representar essa estimativa por $\hat{\theta}_1$, a que se poderia chamar estimativa Bayesiana conservadora, tem-se:

$$\hat{\theta}_1 : P(\theta \geq \hat{\theta}_1) = \gamma \Leftrightarrow \hat{\theta}_1 = F_\theta^{-1}(1 - \gamma) \quad (4.31)$$

Como se acaba de ver, inferências Bayesianas sobre os parâmetros constituem uma aplicação directa da teoria das probabilidades, e, em certa medida, têm uma interpretação probabilística mais clara do que as estimativas clássicas. Os intervalos de confiança Bayesianos são vulgarmente conhecidos por *intervalos de credibilidade*, ou *regiões de credibilidade*, para os distinguir dos intervalos de confiança clássicos, que, embora possam ser coincidentes, têm uma interpretação probabilística diferente (Paulino *et al.*, 2003).

Muitas vezes o objectivo não é realizar inferências sobre o parâmetro θ , mas efectuar cálculos probabilísticos que envolvam directamente a variável X . Recorde-se que o modelo assumido para X foi representado por $f(x | \theta)$, notação esta que enfatiza que esse modelo é válido para θ fixo. Ora, como θ é variável aleatória, deve-se usar nos cálculos probabilísticos que envolvam X a distribuição marginal de X , considerando X como componente do vector aleatório (X, θ) . Na terminologia Bayesiana a distribuição marginal de X é vulgarmente designada por *distribuição preditiva* e, de acordo com (4.16), é dada por:

1) Distribuição preditiva *a priori*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x | \theta) f(\theta) d\theta, \quad (4.32)$$

2) Distribuição preditiva *a posteriori*:

$$f(x | \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x | \theta) f(\theta | \varepsilon) d\theta. \quad (4.33)$$

Observe-se que a distribuição preditiva pode ser encarada como uma média de todas as distribuições $f(x | \theta)$ que se obtêm fazendo variar θ . Note-se também que o modelo preditivo tem em conta não só a incerteza associada à própria variável X , materializada na distribuição $f(x | \theta)$, mas também a incerteza em θ , materializada na distribuição $f(\theta)$ ou $f(\theta | \varepsilon)$. Observe-se ainda que, quando $f(\theta)$ é a conjugada natural de $f(x | \theta)$, os modelos preditivos $f(x)$ e $f(x | \varepsilon)$ são da mesma família, o que naturalmente é desejável.

Conforme se acaba de ver, o modelo Bayesiano de uma população X envolve sempre a considerações de dois modelos probabilísticos: o *modelo dos parâmetros*, $f(\theta)$, e o modelo da própria população, $f(x | \theta)$, chamado *modelo amostral*.

4.5.2 Actualização de modelos probabilísticos por truncamento

Como se disse anteriormente, a nova informação relativa à variável X pode ser da forma $\{X \geq a\}$ ou $\{X \leq b\}$, ou ainda $\{a \leq X \leq b\}$. Por exemplo, após a realização de um ensaio de carga a uma ponte e admitindo que o ensaio não danificou a ponte, pode concluir-se que a resistência nas diferentes secções da estrutura é superior ao esforço que actuou nessas secções por ocasião da realização do ensaio.

Seja então $X \sim f_X(x)$ e admita-se que, por alguma razão, concluiu-se que $X \geq a$. O evento que nos vai permitir actualizar o modelo $f_X(x)$ é pois $\varepsilon = \{X \geq a\}$. Ora, de acordo com o teorema de Bayes, a distribuição actualizada, representada por $f(x | \varepsilon)$, é dada por:

$$f(x | \varepsilon) = \frac{P(\varepsilon | X = x)f_X(x)}{P(\varepsilon)} = \frac{P(X \geq a | X = x)f_X(x)}{1 - F_X(a)}.$$

Mas,

$$P(X \geq a | X = x) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}.$$

Assim,

$$f(x | \varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{1 - F_X(a)} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}. \quad (4.34)$$

A Figura 4.2 ilustra a configuração de uma distribuição truncada:

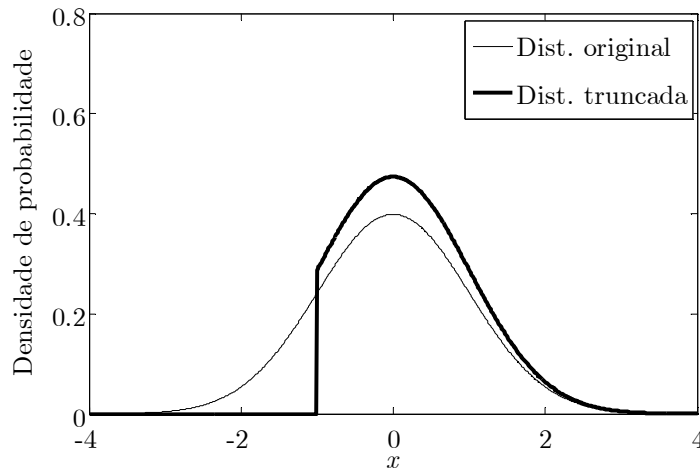


Figura 4.2: Truncamento à esquerda de uma distribuição de probabilidade.

A expressão acima corresponde a um truncamento à esquerda. Por uma dedução semelhante se obtém um truncamento à direita, a que corresponde o evento $\varepsilon = \{X \leq b\}$:

$$f(x | \varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{F_X(b)} & x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}. \quad (4.35)$$

Para um truncamento simultaneamente à esquerda e à direita (evento $\varepsilon = \{a \leq X \leq b\}$), obtém-se:

$$f_{X|\varepsilon}(x|\varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.36)$$

Note-se que as Equações (4.34) e (4.35) podem ser encaradas como um caso particular de (4.36). Por exemplo para o caso $\varepsilon = \{X \geq a\}$ é obtido de (4.36) fazendo $b = +\infty$ (recorde-se que por definição $F_X(+\infty) = 1$).

Um pequeno exemplo ilustra os conceitos acabados de explicar. Suponha-se um pilar de betão armado, cuja resistência X tem distribuição $X \sim N(\mu = 20, \sigma = 3)$ [MPa]. Pretende-se avaliar a probabilidade do pilar ruir se lhe for aplicada uma tensão de 15 MPa. A resposta é $p_f = P(X \leq 15) = F_X(15) = 4.78\%$. Suponha-se agora que o pilar foi ensaiado com uma tensão de 12 MPa e não ruiu. Isto corresponde a um truncamento $X \geq 12$. Assim, a probabilidade de rotura actualizada é dada por:

$$p_f = P(X \leq 15 | X \geq 12) = \frac{P(X \leq 15 \cap X \geq 12)}{P(X \geq 12)} = \frac{F_X(15) - F_X(12)}{1 - F_X(12)} = 4.41\%.$$

4.5.3 Actualização de modelos probabilísticos a partir de observações de variáveis correlacionadas

Considere-se o vector (X, Y) e admita-se conhecida a distribuição conjunta $f(x, y)$. Desta distribuição podem extrair-se as marginais $f(x)$ e $f(y)$. Suponha-se que se observou $X = x$. Então, da definição de distribuição condicionada, resulta:

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}. \quad (4.37)$$

A distribuição $f(y|x)$ pode ser encarada como a distribuição de Y actualizada após a observação $X = x$. A título de exemplo, suponha-se que o vector (X, Y) tem distribuição Normal bidimensional com distribuições marginais $f(x) = N(\mu_X, \sigma_X)$ e $f(y) = N(\mu_Y, \sigma_Y)$. Admita-se que o coeficiente de correlação entre X e Y é igual a ρ . Neste caso, demonstra-se que a distribuição de Y condicionada a $X = x$ é dada por (Meyer, 1983):

$$f(y|x) = N\left(\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}\right). \quad (4.38)$$

Por exemplo, suponha-se que $f(x) = N(10, 2)$, $f(y) = N(15, 3)$ e $\rho = 0.6$. Admita-se que se observou $X = 7$. A distribuição actualizada de Y é então dada por $f(y|x) = N(12.75, 2.6)$.

É claro que muitas vezes a distribuição $f(x, y)$ não é conhecida, dispondo-se apenas de uma amostra $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. Neste caso pode aplicar-se a técnica da regressão e, partindo desse conjunto de pontos, estabelecer um modelo da forma:

$$Y | x = r(x) + E, \quad (4.39)$$

onde $r(x)$ é uma função de x , a estimar, e E uma variável aleatória com média nula e desvio-padrão a estimar também a partir do mesmo conjunto de pontos. A Figura seguinte ilustra graficamente o modelo de regressão:

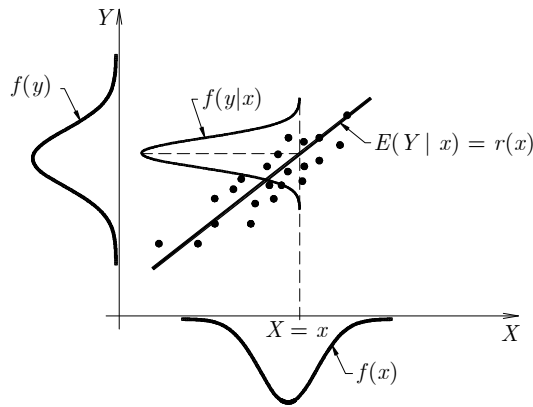


Figura 4.3: Ilustração do modelo de regressão.

No caso específico do modelo de regressão linear simples a função r tem a forma $r(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ e $E \sim N(0, \sigma)$. Assim, para o caso particular do modelo de regressão linear simples, tem-se $Y | x = \beta_0 + \beta_1 x + E$, que mostra que a distribuição de $Y | x$ é Normal, tem média $\beta_0 + \beta_1 x$ e desvio padrão σ , isto é:

$$f(y | x) = N(y | \beta_0 + \beta_1 x, \sigma). \quad (4.40)$$

Esta equação permite obter a distribuição actualizada de Y uma vez conhecida a observação $X = x$.

Comparando (4.40) com o modelo expresso por (4.38), conclui-se que o modelo Normal bi-dimensional é representável por um modelo de regressão linear simples com os seguintes parâmetros:

$$\beta_0 = \mu_Y - \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X; \quad \beta_1 = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}; \quad \sigma = \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (4.41)$$

Quando o comportamento probabilístico do vector (X, Y) puder ser descrito pelo modelo de regressão linear simples, os parâmetros a estimar são três: β_0 , β_1 e σ . Para contabilizar as incertezas estatísticas originadas nos erros associadas às estimativas dos parâmetros β_0 , β_1 e σ pode recorrer-se ao modelo de regressão linear Bayesiano. No Capítulo 7 desta dissertação, que trata da predição da resistência do betão em estruturas existentes, far-se-á uma aplicação deste modelo.

4.6 Análise Bayesiana via método de Monte Carlo

Na subsecção 4.5.1 apresentou-se a formulação Bayesiana geral referente a uma variável ou população X com distribuição $f_X(x | \theta)$ indexada aos parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ que, por serem desconhecidos, são modelados como variáveis aleatórias. Sem perda de generalidade, considere-se o caso em que $f_X(x | \theta)$ é uma distribuição bi-paramétrica, isto é, depende de dois parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Seja $f(\theta_1, \theta_2)$ a distribuição *a priori* de tais parâmetros. Viu-se então que se se dispôr de uma amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ da população X , o teorema de Bayes permite actualizar a distribuição $f(\theta_1, \theta_2)$, transformando-a na distribuição $f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$, dita distribuição *a posteriori*, dada por:

$$f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) = c \cdot L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) \cdot f(\theta_1, \theta_2), \quad (4.42)$$

onde c representa a constante de normalização e $L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$ representa a função verosimilhança, dada por $L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1, \theta_2)$.

Viu-se também que quaisquer cálculos probabilísticos que envolvam directamente a variável X , por exemplo a determinação de probabilidades da forma $P(X < a)$ ou estimativa de quantis $x_p = F_X^{-1}(p)$, deverão ser realizados recorrendo ao modelo preditivo de X , dado por:

$$f_X(x | \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x | \theta_1, \theta_2) f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) d\theta_1 d\theta_2. \quad (4.43)$$

Em muitos casos não é possível obter a expressão analítica de $f_X(x | \varepsilon)$. Nestes casos o método de MC revela-se bastante útil, pois permite gerar artificialmente uma amostra de X a partir da qual se podem realizar quaisquer cálculos probabilísticos que envolvam X . Além disso, como se viu no Capítulo 2, o método de MC é um método poderoso na resolução de problemas de fiabilidade estrutural. Portanto, mesmo nos casos em que é conhecida a expressão analítica de $f_X(x | \varepsilon)$, é importante saber como amostrar a partir desta distribuição.

O objectivo desta secção é demonstrar como se pode gerar artificialmente uma amostra de $f_X(x | \varepsilon)$ sem conhecer a sua expressão analítica. Para simular uma amostra preditiva de X de tamanho N , $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$, é necessário em primeiro lugar simular uma amostra de $f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) = c \cdot L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) \cdot f(\theta_1, \theta_2)$, amostra que representaremos por $\{(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}), \dots, (\theta_1^{(N)}, \theta_2^{(N)})\}$. Tal poderá ser feito recorrendo, por exemplo, ao método da aceitação-rejeição (Fishman, 1995; Rubinstein, 1981). Munidos da amostra $\{(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}), \dots, (\theta_1^{(N)}, \theta_2^{(N)})\}$, a amostra preditiva desejada pode ser obtida recorrendo ao método da composição.

Para efeitos de aplicação do método de MC é conveniente factorizar a distribuição $f(\theta_1, \theta_2)$ na seguinte forma: $f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1 | \theta_2) f(\theta_2)$. Refira-se que se for possível

postular a independência entre θ_1 e θ_2 , a distribuição *a priori* é dada simplesmente por $f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2)$. Um caso em que é razoável assumir tal independência é quando os parâmetros θ_1 e θ_2 são de natureza diferente, como acontece por exemplo quando um deles é parâmetro de localização e o outro é parâmetro de escala.

Para gerar uma amostra $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$ são necessários os seguintes dados:

- modelo amostral $f_X(x | \theta_1, \theta_2)$;
- distribuição *a priori* $f(\theta_1, \theta_2)$, que pode ser a conjugada natural do modelo amostral ou uma distribuição do tipo não informativo ou ainda outra qualquer.
- amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ da população X .

O algoritmo segue então a seguinte sequência:

- 1) começa-se por gerar $\{(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}), \dots, (\theta_1^{(N)}, \theta_2^{(N)})\}$ repetindo tantas vezes quanto necessário o seguinte ciclo (método da aceitação-rejeição):
 - gera-se $\theta_2 \sim f(\theta_2)$;
 - gera-se $\theta_1 \sim f(\theta_1 | \theta_2)$ em que θ_2 é o valor gerado no passo anterior;
 - avalia-se $L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1, \theta_2)$;
 - gera-se $u \sim \text{unif}(0, 1)$;
 - se $u \leq L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$, aceita-se o par (θ_1, θ_2) como pertencendo à distribuição $f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$;
- 2) obtém-se $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$ da seguinte forma (método da composição):
 - gera-se $x^{(1)} \sim f_X(x | \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$;
 - gera-se $x^{(2)} \sim f_X(x | \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)})$;
 - ...
 - gera-se $x^{(N)} \sim f_X(x | \theta_1^{(N)}, \theta_2^{(N)})$.

Observe-se que para aplicar o método da aceitação-rejeição não é necessário conhecer a constante c que figura na Eq. (4.42) — constante de normalização. Isto significa que também não é necessário conhecer qualquer constante que afecte a função verosimilhança, ou, por outras palavras, esta função necessita de ser conhecida apenas a menos de uma constante. O que é essencial garantir é que $0 < L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) \leq 1$ (Rubinstein, 1981). Uma conclusão imediata é que a taxa de aceitação pode ser aumentada determinando previamente $L_{\max} = \max\{L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)\}$. Uma vez conhecido L_{\max} , determina-se $k : kL_{\max} = 1 \Leftrightarrow k = 1 / L_{\max}$. A condição $u \leq L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$ no algoritmo acima será então substituída pela condição $u \leq kL(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$, o que, em muitas situações, permite aumentar grandemente a taxa de aceitação e aumentar a eficiência do algoritmo, visto que, com frequência, $L(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon) \ll 1$. No Capítulo 8 desta dissertação (caso de estudo) far-se-á uma aplicação deste algoritmo.

Termina-se esta secção por referir que o método de simulação descrito acima para amostrar a partir da distribuição $f(\theta_1, \theta_2 | \varepsilon)$ — método da aceitação-rejeição — pertence à categoria dos chamados métodos directos (Paulino *et al.*, 2003). Em alternativa ao uso de métodos directos, dispõe-se dos chamados métodos baseados em cadeias de Markov, que têm gozado de ampla popularidade no domínio de análise Bayesiana (Congdon, 2003). Estes métodos consistem na simulação de uma cadeia de Markov cuja distribuição estacionária, ou distribuição limite, seja a distribuição que se pretende simular. Os métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov, que na literatura inglesa são conhecidos pela sigla MCMC (iniciais da expressão *Markov Chain Monte Carlo*), são métodos indirectos, pois a cadeia gerada só pode ser considerada uma amostra da distribuição estacionária depois de convergir. Isto significa que, como método de amostragem, o método MCMC deve ser aplicado com muito cuidado, pois é fundamental verificar que a cadeia convergiu. Tópicos como a questão da convergência e ainda outros têm sido alvo de ampla investigação no domínio da Matemática Aplicada. Por sair claramente do âmbito da presente dissertação, não se fará referência adicional a este assunto. Refere-se apenas que, entre os algoritmos pertencentes à categoria dos métodos de MC via cadeias de Markov, destaca-se o algoritmo de Metropolis-Hastings e o algoritmo de Gibbs (Chen *et al.*, 2000).

4.7 Decisão Bayesiana

A modelação de quantidades incertas por meio de variáveis aleatórias revela-se extremamente eficaz em problemas de decisão (Benjamim & Cornell, 1970; Raiffa & Schlaifer, 2000; Bernardo & Smith, 1994; Kübler, 2006).

Um problema de decisão coloca-se sempre que é necessário escolher uma entre várias alternativas, a_1, a_2, \dots , também chamadas de acções. A cada acção a_i corresponde uma determinada consequência, $C(a_i)$. Muitas vezes, porém, a consequência é incerta, pois depende de certos estados θ desconhecidos, pelo que a decisão vai ter de ser tomada face a cenários incertos. Suponha-se, sem perda de generalidade, que o problema em mãos depende apenas de um estado desconhecido θ e que este pode assumir os valores discretos θ_j , $j = 1, 2, \dots$. A cada acção a_i e a cada valor θ_j associa-se uma consequência $C(a_i, \theta_j)$.

Uma vez que θ é desconhecido, então, à luz do paradigma Bayesiano, deve ser modelado como variável aleatória, atribuindo-se-lhe uma determinada distribuição de probabilidade. Por conseguinte, a consequência C , por ser função de variável aleatória, é também variável aleatória. Seja $f(\theta_j) = P(\theta = \theta_j)$. Assim, o valor esperado da consequência de se tomar a acção a_i é dada por:

$$E(C | a_i) = \sum_j C(a_i, \theta_j) f(\theta_j). \quad (4.44)$$

A decisão mais racional é a que recai na acção cuja consequência esperada seja a mínima. Note-se que a consequência da acção a_i não é necessariamente negativa, podendo, numa situação mais genérica, ser definida como a diferença entre benefícios $B(a_i)$ e perdas $L(a_i)$. Neste caso é mais usual usar-se a designação utilidade em vez de consequência. Assim, a utilidade da acção a_i é definida por:

$$U(a_i) = B(a_i) - L(a_i). \quad (4.45)$$

A decisão deve recair na acção a que corresponde a utilidade máxima, ou melhor, valor esperado máximo da utilidade. Como é evidente, se o benefício B for idêntico para todas as acções, pode ser eliminado do problema de decisão, figurando apenas as perdas associadas a acção. Neste caso, a decisão deve recair na acção que minimize as perdas esperadas.

No caso de problemas complexos envolvendo diversas variáveis de estado é de ajuda esquematizar o problema na forma de uma árvore, chamada árvore de decisão, como se ilustra na Figura 4.4 para o caso de existirem duas variáveis de estado, θ_1 e θ_2 .

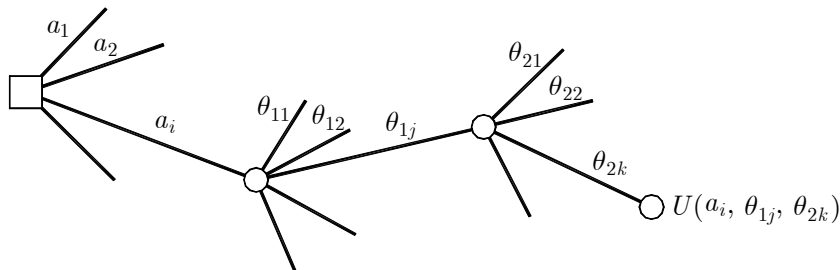


Figura 4.4: Ilustração de uma árvore de decisão.

Para ilustrar a aplicação desta teoria a um problema com interesse em avaliações estruturais de pontes existentes, considere-se o exemplo que se descreve de seguida. Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma ponte existente, tendo-se concluído, mesmo após refinamentos da análise, que a capacidade de carga da ponte não é suficiente face às sobrecargas regulamentares. Assim, uma decisão possível é reforçar imediatamente a ponte. No entanto, suspeita-se que a ponte talvez tenha uma capacidade superior à indicada pela análise efectuada, pelo que uma boa decisão talvez seja realizar uma prova de carga antes de reforçar a ponte. Se o resultado do ensaio vier a ser positivo, isto é, se vier a demonstrar que a ponte tem capacidade de carga suficiente, evitam-se trabalhos de reforço e a realização do ensaio foi uma boa decisão. A realização do ensaio, porém, além de não garantir que venha a ter um

resultado positivo e de implicar o custo do ensaio, acarreta também o risco de se introduzir danos na estrutura, o que obrigaria a custos adicionais de reparação.

Suponha-se que, de acordo com estudos anteriores, a probabilidade da ponte satisfazer as sobrecargas regulamentares é avaliada em 10%. Suponha-se, além disso, que na hipótese de se realizar o ensaio, a probabilidade de se introduzirem danos é relativamente elevada, digamos 30%. Relativamente aos custos, estima-se que o reforço da ponte importa em 100 000 u.m. (unidades monetárias), o custo do ensaio é de 2000 u.m. e o custo de reparação de eventuais danos provocados pelo ensaio é estimado em 1000 u.m. Qual a melhor decisão? Deve-se proceder imediatamente ao reforço da estrutura ou é de arriscar a realização de uma prova de carga?

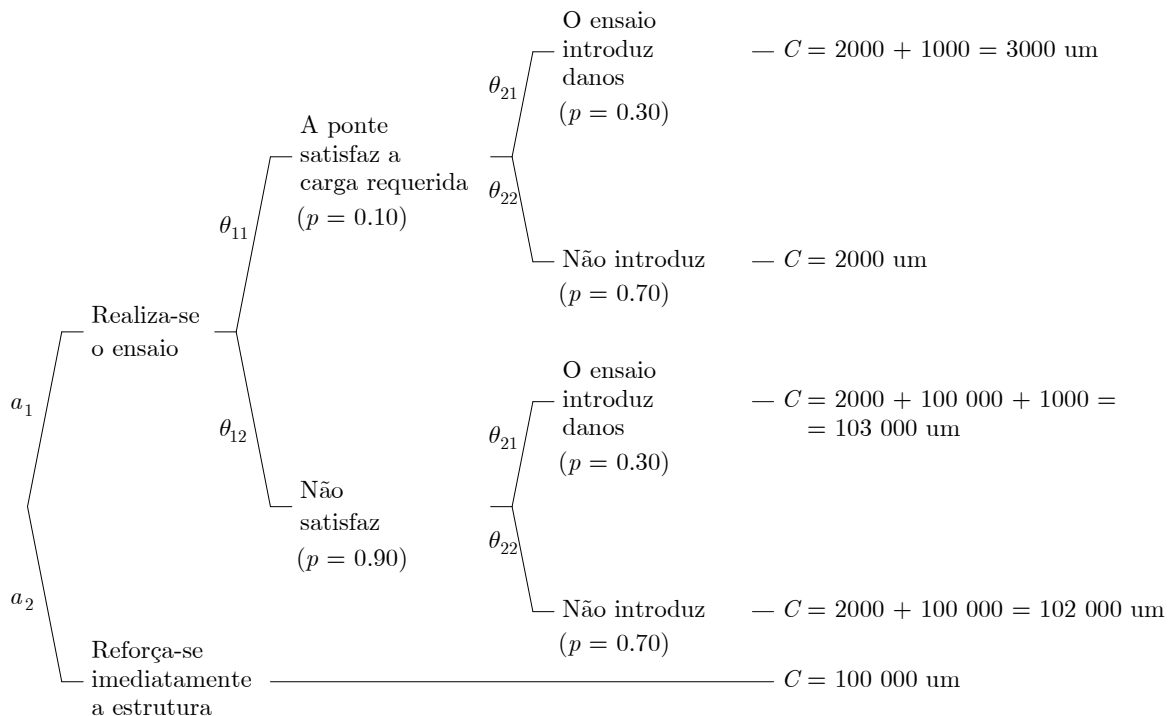


Figura 4.5: Árvore de decisão relativo a um ensaio de carga.

Trata-se de um problema de decisão que se resolve muito facilmente recorrendo à árvore de decisão esquematizada na Figura 4.5. Da figura obtêm-se imediatamente os seguintes custos esperados:

$$E(C \mid a_1, \theta_{11}) = 0.30 \times 3000 + 0.7 \times 2000 = 2300 \text{ u.m.}$$

$$E(C \mid a_1, \theta_{12}) = 0.30 \times 103000 + 0.7 \times 102000 = 102300 \text{ u.m.}$$

Os valores esperados dos custos das acções a_1 e a_2 são assim iguais a:

$$E(C \mid a_1) = 0.10 \times 2300 + 0.90 \times 102300 = 92300 \text{ u.m.}$$

$$E(C \mid a_2) = 100000 \text{ u.m.}$$

Portanto, o custo esperado da alternativa a_1 (realização do ensaio antes do reforço) importa em 92 300 u.m., enquanto que o custo esperado da alternativa a_2 é de 100 000 u.m.. Assim, neste exemplo, pese embora o facto da diferença do custo esperado das alternativas a_1 e a_2 não ser significativa, a alternativa a_1 é a mais racional.

4.8 Considerações finais

Neste capítulo apresentaram-se os conceitos fundamentais da teoria Bayesiana relevantes para os objectivos da presente dissertação. A teoria Bayesiana assenta numa interpretação de probabilidade mais geral e mais abrangente que a interpretação frequentista, englobando-a como um caso particular. De acordo com a interpretação Bayesiana, a probabilidade é simplesmente uma medida condicional de incerteza na escala entre 0 e 1. Como medida de incerteza, a probabilidade aplica-se a todas as quantidades incertas, quer se trate de quantidades aleatórias, e portanto susceptíveis de assumir mais do que um valor, quer se trate de quantidades com valor único, mas desconhecido. De acordo com a abordagem Bayesiana, faz sentido atribuir probabilidades a quantidades fixas, mas por alguma razão desconhecidas. Estas quantidades são frequentemente chamadas de estados da natureza. A atribuição de uma distribuição de probabilidade a uma quantidade fixa surge assim como uma forma conveniente e prática de descrever a incerteza que se tem actualmente a respeito dessa quantidade.

Disse-se acima que a probabilidade é uma medida condicional de incerteza. O adjectivo condicional é chave nesta definição. De facto, a probabilidade atribuída a qualquer quantidade está sempre dependente, ou é condicionada, pela informação disponível a respeito dessa quantidade. Se surgirem novas informações relevantes, a probabilidade poderá ser revista (ou actualizada) em conformidade. Como se viu, o teorema de Bayes, que é uma simples proposição de probabilidades condicionadas, constitui o mecanismo formal de actualização de probabilidades.

Analysaram-se três situações distintas envolvendo a actualização da distribuição de probabilidade $f_X(x)$ de uma variável X . A primeira surge quando a nova informação é do tipo amostral, isto é, quando se observa um evento na forma de uma amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ da variável X . Conforme se viu, a actualização da distribuição $f_X(x)$ é possível graças à modelação dos parâmetros θ dessa distribuição como variáveis aleatórias, embora se tratem de quantidades fixas. O processo de actualização do modelo $f_X(x)$ é feito em duas etapas: primeiro actualiza-se a distribuição $f(\theta)$, transformando-a na distribuição $f(\theta | \varepsilon)$. Depois, partindo desta, actualiza-se a distribuição $f_X(x)$, transformando-a na distribuição $f_X(x | \varepsilon)$. A actualização é um

processo contínuo, isto é, dá-se sempre que se observa uma nova amostra da população X , como se esquematiza na Figura 4.6. Em geral o processo inicia-se com escassez de informação, partindo-se assim de uma distribuição $f(\theta)$ do tipo não informativo.

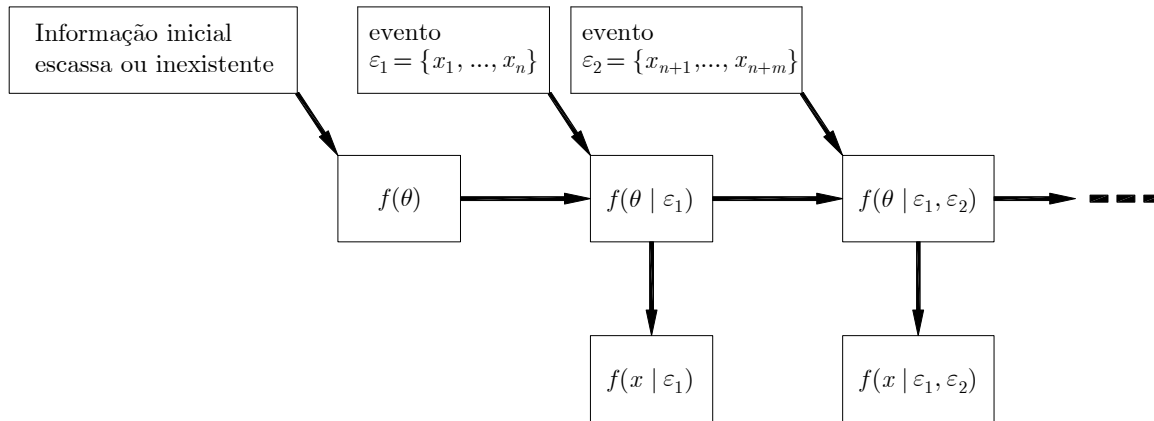


Figura 4.6: Processo de actualização Bayesiana como processo contínuo.

Analizou-se também a situação quando a nova informação é do tipo $\varepsilon = \{a < X < b\}$ que conduz, como se viu, a um truncamento da distribuição original. Finalmente analisou-se uma terceira situação que surge quando a nova informação consiste na observação do evento $\varepsilon = \{Y = y\}$, onde Y é uma variável correlacionada com a variável de interesse X .

Desenvolveu-se um algoritmo que permite, via método de MC, a realização de actualizações do primeiro tipo mencionado acima. Este algoritmo combina o método da aceitação-rejeição com o método da composição. Propôs-se um critério que permite acelerar a taxa de aceitação e consequentemente aumentar a eficiência do algoritmo.

Trataram-se apenas dos aspectos considerados essenciais para o desenvolvimento da dissertação. Por este motivo não se incluiu tópicos tais como a modelação de opiniões de especialistas (*expert opinion*), que poderão ser úteis em problemas onde há escassez de dados amostrais mas existem pessoas com experiência valiosa. O problema da modelação de opiniões de especialistas (ou peritos) consiste na representação da informação colhida desses especialistas através de apropriadas distribuições de probabilidade, que assumirão o papel de distribuições *a priori* no contexto da abordagem Bayesiana (Bedford & Cooke, 2001).

Capítulo 5

Impacto da incerteza estatística em fiabilidade estrutural

5.1 Considerações iniciais

A abordagem Bayesiana de uma população X apresenta duas vantagens principais. Por um lado, permite incluir a incerteza estatística em todos os cálculos probabilísticos que envolvem X (Engelund & Rackwitz, 1992), como a determinação de probabilidades da forma $P(X < a)$ ou a determinação de quantis $x_p = F_X^{-1}(p)$. A inclusão da incerteza estatística na estimativa dessas quantidades é feita por se usar para X o modelo preditivo Bayesiano. Outra vantagem reside na possibilidade de combinar, via Teorema de Bayes, informação anterior (que eventualmente possa existir) com informação amostral, o que pode ser particularmente vantajoso quando a amostra disponível é de pequena dimensão para a quantidade que se pretende estimar (incerteza estatística com impacto significativo nessa estimativa).

Acontece frequentemente, porém, que a informação anterior é de natureza subjectiva, pelo que o seu uso deve ser criterioso, e em princípio restringir-se apenas aos casos em que a incerteza estatística tem impacto significativo na quantidade a estimar. Assim, em qualquer análise probabilística, julga-se de grande importância avaliar o impacto da incerteza estatística nas quantidades que estiverem a ser estimadas. Tal ajudará a decidir se se justifica ou não complementar a amostra disponível da população X com informação anterior que eventualmente exista.

Neste capítulo investiga-se o impacto da incerteza estatística em quantidades com interesse na área da segurança estrutural, como sejam, valores característicos, coeficientes parciais de segurança e índices de fiabilidade. Para este efeito, irão ser usados dois métodos que se sintetizam de seguida. Suponha-se que se deseja estimar

uma quantidade q referente a uma população X com distribuição $f_X(x | \theta_1, \theta_2, \dots)$, para o que se dispõe de uma amostra dessa população. O primeiro método consiste em comparar a estimativa Bayesiana \hat{q} (que se obtém usando o modelo preditivo $f_X(x)$ da população em estudo) com a estimativa \hat{q}_0 que seria obtida ignorando a incerteza estatística, isto é, usando o modelo $f_X(x | \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots)$, onde $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots)$ referem-se a estimativas pontuais dos parâmetros $(\theta_1, \theta_2, \dots)$. A diferença entre \hat{q} e \hat{q}_0 constitui uma medida do impacto da incerteza estatística na estimativa \hat{q} .

O segundo método, ligeiramente mais complexo, mas também mais potente, consiste em expressar a quantidade q como função dos parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ e obter, via MC, a distribuição (*a posteriori*) dessa quantidade. Uma vez que à luz do paradigma Bayesiano os parâmetros θ são modelados como variáveis aleatórias, a quantidade $q = q(\theta_1, \theta_2, \dots)$, por ser função de variável aleatória, é também variável aleatória, tendo a sua própria distribuição de probabilidade, assim como média (μ_q), e desvio padrão, (σ_q). O desvio padrão σ_q , que de acordo com a terminologia da Estatística pode ser correctamente designado por *erro padrão*, constitui uma boa medida da incerteza (estatística) em q (Kiureghian, 2008).

O estudo a desenvolver dá ênfase a parâmetros de resistência, nos quais o modelo Normal é frequentemente usado. Um dos motivos tem a ver com o facto da hipótese de normalidade poder ser em geral encarada como hipótese conservativa quando aplicada a parâmetros de resistência. Efectivamente, como mencionado na ISO 2394 (1998), a segurança estrutural é condicionada pelas caudas das distribuições (cauda inferior no caso de variáveis de resistência e cauda superior no caso de acções) e a cauda inferior do modelo Normal é mais pesada que a cauda inferior dos principais modelos probabilísticos usados em parâmetros de resistência (distribuição Lognormal, Gama e Weibull). O modelo Normal desempenha também importante papel na descrição de acções, particularmente acções permanentes, mas não só.

Justifica-se pois analisar o modelo Normal com algum detalhe, o que será feito na próxima secção. Vai considerar-se apenas o caso em que ambos os parâmetros da variável básica X (média e variância) são desconhecidos, por ser o caso com maior interesse prático. Além disso, deve referir-se que o modelo Bayesiano de uma população Normal com variância conhecida não permite extrair toda a informação contida em amostras dessa população (Jacinto *et al.*, 2008), o que constitui um incentivo para que se modele também incerteza na variância. Depois de se analisar o modelo Normal, investiga-se o impacto da incerteza estatística nos valores característicos, nos coeficientes de segurança e nos índices de fiabilidade.

5.2 Modelo Bayesiano de uma população Normal

Os resultados analíticos apresentados nesta secção são tratados em pormenor em Bernardo & Smith (1994) e em Paulino *et al.* (2003). Textos clássicos tais como Raiffa & Schlaifer (2000) e Box & Tiao (1992) contêm resultados semelhantes. Ditlevsen & Madsen (2005), investigadores com trabalho reconhecido no domínio da fiabilidade estrutural, analisam também em detalhe o modelo Bayesiano de populações Normais.

No estudo que segue, onde se aplica o modelo Bayesiano de populações Normais a problemas de segurança de pontes existentes recorrendo a dados reais, vai necessitar-se da forma expandida da distribuição t-Student, aqui representada por $St(a, b, \nu)$, que se obtém da t-Student reduzida por meio da transformação linear $Y = a + bX$, isto é, $X \sim St(\nu) \Leftrightarrow (Y = a + bX) \sim St(a, b, \nu)$. Vai necessitar-se ainda da distribuição Gama invertida, aqui representada por $GI(\alpha, \beta)$, que se obtém da distribuição Gama por inversão, isto é, $X \sim Ga(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (Y = 1 / X) \sim GI(\alpha, \beta)$. A definição da parametrização destes modelos adoptada na presente dissertação consta no Anexo A.

Considere-se então uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e admita-se que ambos os parâmetros são desconhecidos. Assim, de acordo com o paradigma Bayesiano, μ e σ^2 devem ser modelados como variáveis aleatórias. A distribuição (conjunta) *a priori* desses parâmetros será representada por $f(\mu, \sigma^2)$ e a distribuição *a posteriori*, isto é, depois de se observar a amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$, por $f(\mu, \sigma^2 | \varepsilon)$. Analisa-se em primeiro lugar o caso em que não existe informação anterior relevante e posteriormente o caso inverso.

5.2.1 Caso em que a informação anterior não é relevante

Suponha-se que a única informação relevante a respeito da variável X é a contida na amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$, informação que se resume nas seguintes estatísticas:

- dimensão da amostra: n ;
- média da amostra: $\bar{x} = (1 / n) \sum_{i=1}^n x_i$;
- variância da amostra: $s^2 = [1 / (n - 1)] \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Como mencionado no Capítulo 4, quando a única informação relevante é de natureza amostral, a distribuição *a posteriori* é obtida partindo de uma distribuição *a priori* do tipo não informativo, sendo muito usual a distribuição de Jeffreys, que no caso em apreço tem a forma $f(\mu, \sigma^2) = 1 / \sigma^2$. A partir desta distribuição (que é imprópria) e da amostra ε , o Teorema de Bayes conduz à seguinte distribuição *a posteriori*:

$$f(\mu, \sigma^2 | \varepsilon) = N\left(\mu | \bar{x}, \frac{\sigma^2}{n}\right) \cdot GI\left(\sigma^2 | \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} s^2\right). \quad (5.1)$$

Trata-se pois de uma mistura entre a distribuição Normal e a Gama invertida. Observando atentamente a distribuição conjunta acima, facilmente se conclui que a distribuição marginal *a posteriori* de σ^2 é dada por:

$$f(\sigma^2 | \varepsilon) = GI(\sigma^2 | \alpha, \beta). \quad (5.2)$$

com $\alpha = (n-1)/2$ e $\beta = [(n-1)/2]s^2$, e que a distribuição de μ condicional em σ^2 é dada por:

$$f(\mu | \varepsilon, \sigma^2) = N(\mu | \bar{x}, \sigma^2 / n). \quad (5.3)$$

Com respeito à distribuição marginal *a posteriori* de μ , pode-se demonstrar que é dada por:

$$f(\mu | \varepsilon) = St(\mu | a, b, \nu), \quad (5.4)$$

com $a = \bar{x}$, $b = s / \sqrt{n}$ e $\nu = n-1$.

Relativamente ao modelo preditivo *a posteriori*, tem-se:

$$f_X(x | \varepsilon) = St\left(x | \bar{x}, s\sqrt{1 + \frac{1}{n}}, n-1\right). \quad (5.5)$$

Observe-se que quando $n \rightarrow \infty$, $f_X(x | \varepsilon) \rightarrow N(x | \bar{x}, s^2)$, isto é, a consideração do modelo $N(x | \bar{x}, s^2)$ equivale a considerar $n = \infty$ e portanto a ignorar a incerteza estatística nas estimativas \bar{x} e s^2 .

5.2.2 Caso em que a informação anterior é relevante

Suponha-se agora que antes da observação da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ já havia informação a respeito dos parâmetros μ e σ^2 , e que essa informação (informação *a priori*) pode ser descrita por meio da conjugada natural do modelo amostral $N(x | \mu, \sigma^2)$. A conjugada natural do modelo Normal consiste numa mistura entre a distribuição Normal e a gama invertida — precisamente o tipo de distribuição que se obtém quando se utiliza a distribuição de Jeffreys como distribuição *a priori*. A distribuição $f(\mu, \sigma^2)$ tem pois a forma da Eq. (5.1), isto é:

$$f(\mu, \sigma^2) = N\left(\mu | \mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right) \cdot GI(\sigma^2 | \alpha_0, \beta_0), \quad (5.6)$$

onde os parâmetros μ_0 , n_0 , α_0 e β_0 , designados habitualmente na terminologia Bayesiana por hiperparâmetros, materializam a informação *a priori*.

A Eq. (5.6) mostra que a distribuição marginal *a priori* de σ^2 é dada por:

$$f(\sigma^2) = GI(\sigma^2 | \alpha_0, \beta_0). \quad (5.7)$$

e que a distribuição de μ condicional em σ^2 é igual a:

$$f(\mu | \sigma^2) = N(\mu | \mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}). \quad (5.8)$$

Além disso, pode-se demonstrar que a marginal de μ (*a priori*) é t-Student, centrada em μ_0 .

A distribuição *a priori* $f(\mu, \sigma^2)$ depende assim de quatro hiperparâmetros: μ_0 , n_0 , α_0 e β_0 . O hiperparâmetro μ_0 coincide com a média *a priori* de μ , n_0 é por vezes designado *dimensão da amostra equivalente a priori* e α_0 e β_0 estão directamente relacionados com a distribuição de marginal σ^2 , e definem-na completamente.

Uma vez observada a amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$, o Teorema de Bayes permite actualizar a distribuição (5.6), transformando-a na distribuição:

$$f(\mu, \sigma^2 | \varepsilon) = N(\mu | \mu_n, \frac{\sigma^2}{n_n}) \cdot GI(\sigma^2 | \alpha_n, \beta_n), \quad (5.9)$$

onde os parâmetros μ_n , n_n , α_n e β_n , que representam os hiperparâmetros actualizados, são dados por (Bernardo e Smith, 1994):

$$\mu_n = \frac{n_0 \mu_0 + n \bar{x}}{n_0 + n}; \quad n_n = n_0 + n \quad (5.10)$$

$$\alpha_n = \alpha_0 + n / 2; \quad \beta_n = \beta_0 + \frac{n-1}{2} s^2 + \frac{n_0 n (\mu_0 - \bar{x})^2}{2(n_0 + n)} \quad (5.11)$$

Com respeito às distribuições preditivas, são dadas por:

1) Distribuição preditiva *a priori*:

$$f_X(x) = St\left(x | \mu_0, \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \frac{\beta_0}{\alpha_0}}, 2\alpha_0\right), \quad (5.12)$$

2) Distribuição preditiva *a posteriori*:

$$f_X(x | \varepsilon) = St\left(x | \mu_n, \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_n}\right) \frac{\beta_n}{\alpha_n}}, 2\alpha_n\right), \quad (5.13)$$

onde μ_n , n_n , α_n e β_n são dados por (5.10) e (5.11).

5.2.3 Exemplo

Os estudos a realizar neste capítulo terão por base o exemplo que passa a descrever-se. Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma ponte existente, tendo-se detectado que o cenário crítico da estrutura é a rotura por flexão numa dada secção do tabuleiro. Sabendo-se que o tabuleiro é pré-esforçado e que a resistência do aço de pré-esforço tem uma contribuição decisiva para o momento resistente da secção em apreço, foi decidido colher informação mais real (comparativamente com a especificada nos regulamentos) a respeito da resistência do aço. Os registos de obra foram consultados e a partir dos certificados de qualidade dos aços colheu-se a seguinte amostra de resistências (tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1%, em geral representada por $f_{p0.1}$):

$$\varepsilon = \{1807, 1818, 1818, 1784, 1860, 1846, 1807, 1829, 1778\} \text{ [MPa]}.$$

Esta amostra refere-se a cordões da classe Y1860 (prEN 10138-1, 2009) e foi colhida de uma ponte construída em 2005. Cada valor da amostra corresponde a uma bobine empregue no tabuleiro. A informação contida na amostra encontra-se resumida nas seguintes estatísticas:

$$n = 9; \quad \bar{x} = 1816.3 \text{ MPa}; \quad s = 26.6 \text{ MPa}.$$

O coeficiente de variação tem o valor $V_X = s / \bar{x} = 0.015$, que, como se constata, é bastante baixo.

Vai assumir-se que a amostra acima pertence a uma população Normal. Naturalmente questiona-se se a amostra suporta este modelo. A amostra é manifestamente pequena para responder a essa questão, mas como sugerido por Jacinto *et al.* (2011), a lei Normal é adequada na descrição da tensão limite convencional de proporcionalidade, assim como na descrição de outras propriedades mecânicas dos aços de pré-esforço. Além disso, existem razões físicas para crer que o modelo Normal é adequado. Com efeito, considerando que a carga de rotura corresponde à soma de um número significativo de roturas dúcteis de fibras paralelas e que cada fibra mantém a sua tensão após cedência, o *Teorema do Limite Central* permite fundamentar a hipótese de normalidade (JCSS, 2001a). Por outro lado, como referido anteriormente, esta hipótese, quando aplicada a parâmetros de resistência, pode ser encarada como hipótese conservativa. Justifica-se pois considerar que $f_{p0.1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, o que permite usar os resultados analíticos apresentados na secção anterior.

Analise-se, em primeiro lugar, a distribuição *a posteriori* de μ e σ^2 , usando a amostra acima como única fonte informação. A Figura 5.1 mostra as distribuições *a posteriori* marginais desses parâmetros, obtidas das Eqs. (5.4) e (5.2),

respectivamente. Ao observar essas distribuições é importante ter presente que os parâmetros não possuem aleatoriedade própria, pois são, por definição, quantidades fixas, embora desconhecidas. As respectivas distribuições de probabilidade devem ser encaradas como descrições da incerteza nos parâmetros que permanece depois de se observar a amostra. Relativamente ao parâmetro μ (média da população), recorrendo a (5.4), obteve-se para a média deste parâmetro o valor de 1816 MPa, que pode ser interpretado como a estimativa Bayesiana da média da população (que coincide aliás com a média amostral). O desvio padrão de μ é 10 MPa e pode ser encarado como uma medida do erro na estimativa da média. Tratando-se de um erro relativamente pequeno, pode-se concluir que a estimativa 1816 MPa é relativamente precisa.

Considere-se agora o parâmetro σ^2 . Recorrendo a (5.2), obteve-se para a média deste parâmetro o valor de 940 MPa², que pode ser encarada a estimativa Bayesiana da variância da população. O desvio padrão de σ^2 , que é de 665 MPa², constitui uma medida do erro nessa estimativa. Por se tratar de um erro relativamente grande (erro relativo de 70%), pode afirmar-se que a estimativa da variância não é muito precisa. A análise Bayesiana da amostra permite então concluir que a sua dimensão é razoável para efeitos de estimativa da média da população, mas é relativamente pequena para efeitos de estimativa da variância.

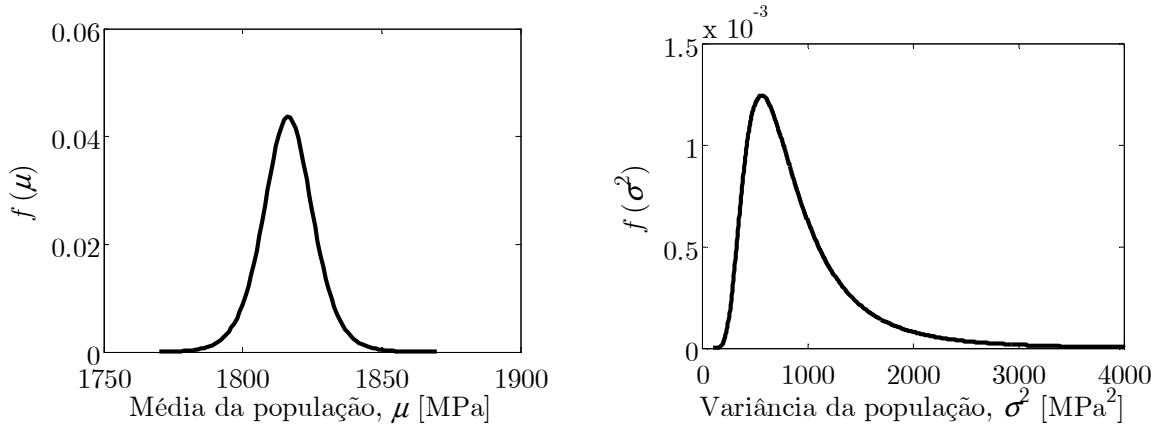


Figura 5.1: Densidades *a posteriori* da média e variância da população $f_{p0.1}$ (tensão limite convencional de proporcionalidade).

Tem interesse analisar o grau de dependência entre μ e σ^2 após observação da amostra ε . Note-se que *a priori* esses parâmetros foram considerados independentes, hipótese esta implícita na distribuição de Jeffreys $f(\mu, \sigma^2) = 1 / \sigma^2$, mas depois de observada a amostra, μ e σ^2 tornam-se dependentes, como mostra a Eq. (5.1). Recorrendo ao método de MC e à Eq. (5.1), gerou-se uma amostra do vector (μ, σ^2) constituída por 1000 pontos, que se encontram representados na Figura 5.2 na forma de diagrama de dispersão. Esse diagrama sugere que o grau de dependência entre μ e σ^2 é bastante pequeno. O coeficiente de correlação entre μ e σ^2 é de apenas 0.002.

Relativamente ao modelo preditivo da tensão limite convencional de proporcionalidade $f_{p0.1}$, mostra-se na Figura 5.3 a respectiva densidade de probabilidade, obtida de (5.5), mostrando-se ainda, para efeitos comparativos, o modelo $N(x | \bar{x}, s^2)$, que ignora a incerteza estatística.

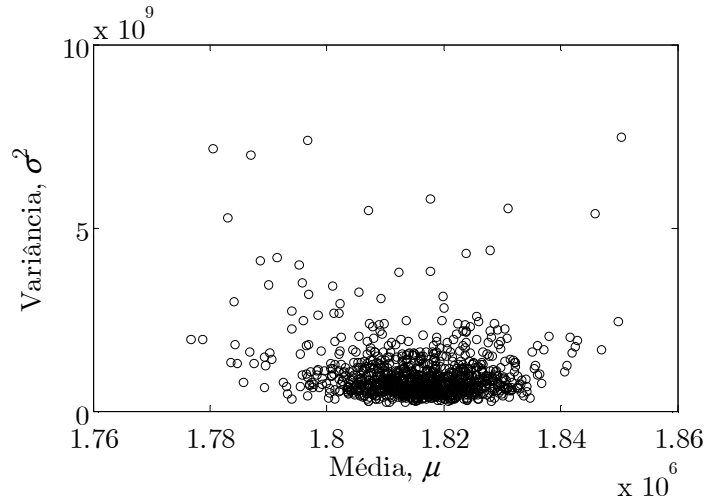


Figura 5.2: Gráfico de dispersão de pontos (μ, σ^2) gerados artificialmente a partir da distribuição *a posteriori*.

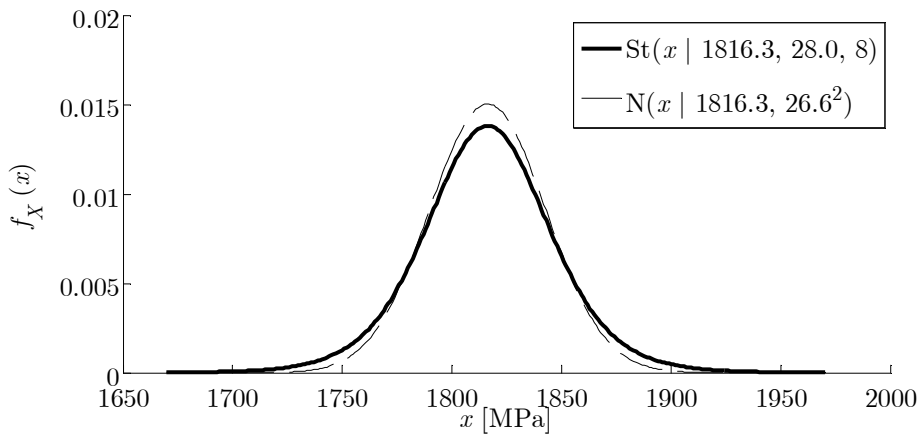


Figura 5.3: Densidade de probabilidade de $X = f_{p0.1}$: modelo preditivo Bayesiano e modelo que ignora a incerteza estatística.

5.3 Impacto da incerteza estatística nos valores característicos

Nesta secção analisa-se o impacto da incerteza estatística nos valores característicos de parâmetros de resistência. O valor característico X_k de um parâmetro de resistência X identifica-se em geral com o quantilho 0.05 da sua distribuição de probabilidade. Assumindo que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e que a única informação relevante a respeito de X é a contida na amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$, o modelo preditivo de X é dado pela Eq. (5.5), que é equivalente a:

$$X = \bar{x} + s \sqrt{1 + \frac{1}{n}} T_{n-1}, \quad (5.14)$$

onde \bar{x} e s representam a média e desvio padrão da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $T_{n-1} \sim St(0, 1, n-1)$. Assim, a estimativa Bayesiana de X_k é dada por:

$$\hat{X}_k = \bar{x} + s \sqrt{1 + \frac{1}{n}} t(p, n-1) = \left(1 + V_X \sqrt{1 + \frac{1}{n}} t(p, n-1) \right) \bar{x}, \quad (5.15)$$

onde $t(p, n-1)$ é a inversa de uma distribuição t-Student com $\nu = n-1$ graus de liberdade, avaliada em p , e $V_X = s / \bar{x}$.

Usando os dados do exemplo descrito na secção anterior (que envolve uma amostra de resistências de aço de pré-esforço colhida de uma ponte construída em 2005), obteve-se $\hat{X}_k = 1764$ MPa. Estime-se agora X_k mas sem levar em conta a incerteza estatística, isto é, considerando o modelo $f_X(x) = N(x | \bar{x}, s^2)$, no qual os parâmetros μ e σ^2 foram substituídos pelas estimativas pontuais usuais, \bar{x} e s^2 , respectivamente. A estimativa de X_k ignorando a incerteza estatística é então dada por:

$$\hat{X}_{k0} = \bar{x} + s \cdot z(p) = \left(1 + V_X z(p) \right) \bar{x}, \quad (5.16)$$

onde $z(p)$ representa a inversa da distribuição Normal reduzida avaliada em p ($z(0.05) = -1.645$). Note-se que quando $n \rightarrow \infty$, $\hat{X}_k \rightarrow \hat{X}_{k0}$, o que significa que a não consideração da incerteza estatística equivale a considerar $n = \infty$ na Eq. (5.15). Para o exemplo que se tem vindo a estudar, obteve-se $\hat{X}_{k0} = 1773$ MPa, que é muito próximo da estimativa Bayesiana $\hat{X}_k = 1764$ MPa. Assim, a penalização devida à incerteza estatística é relativamente pequena, podendo-se concluir que a dimensão da amostra disponível pode ser considerada suficiente para efeitos de estimativa do valor característico.

Considere-se agora uma variável de resistência genérica. A Figura 5.4 mostra o gráfico de $\rho = \hat{X}_k / \hat{X}_{k0}$ para diferentes valores do coeficiente de variação V_X .

Observe-se que quando $n \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 1$. O gráfico mostra que para amostras com coeficiente de variação inferior a 0.15, a dimensão 10 pode ser considerada razoável para efeitos de estimativa de valores característicos (penalização inferior a 5%). Para amostras com coeficiente de variação de 0.20, seria desejável uma amostra com dimensão de cerca de 15 (de modo a ter uma penalização inferior a 5%). Observa-se assim que para estimar valores característicos com precisão aceitável não são necessárias amostras muito grandes.

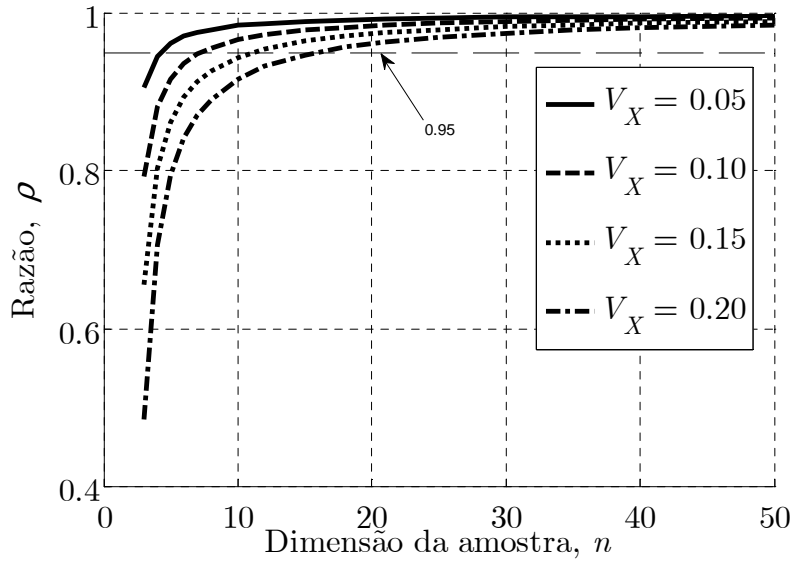


Figura 5.4: Razão $\rho = \hat{X}_k / \hat{X}_{k0}$ em função da dimensão da amostra n .

Existe ainda outra abordagem que permite avaliar o impacto da incerteza estatística no valor característico X_k , como se explicou anteriormente. Admitindo que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, o valor característico é dado por $X_k = \mu - 1.645\sigma$. Ora, visto que os parâmetros μ e σ^2 estão a ser modelados como variáveis aleatórias, segue que X_k é também variável aleatória, tendo a sua própria média (μ_{X_k}) e desvio padrão (σ_{X_k}). A média μ_{X_k} pode ser interpretada como uma boa estimativa de X_k e o desvio padrão σ_{X_k} como uma medida do erro (ou incerteza) nessa estimativa. Recorrendo ao método de MC e às distribuições *a posteriori* de μ e σ^2 (Eq. (5.1)), obteve-se $\mu_{X_k} = 1768$ MPa e $\sigma_{X_k} = 17.5$ MPa, a que corresponde um erro relativo de apenas 1%. Por se tratar de um erro relativo muito baixo, pode concluir-se que a incerteza estatística na estimativa do valor característico é bastante pequena.

Na Figura 5.5 mostra-se a distribuição *a posteriori* de X_k , obtida através do método de MC. O conhecimento desta distribuição permite determinar diferentes probabilidades. Determine-se, por exemplo, a probabilidade $P(X_k > \hat{X}_k)$, onde \hat{X}_k representa a estimativa Bayesiana dada por (5.15), para a qual se obteve 1764 MPa.

A probabilidade acima é de 0.66, isto é, a estimativa Bayesiana assegura-nos que o verdadeiro valor de X_k está acima de 1764 MPa com uma probabilidade de 0.66.

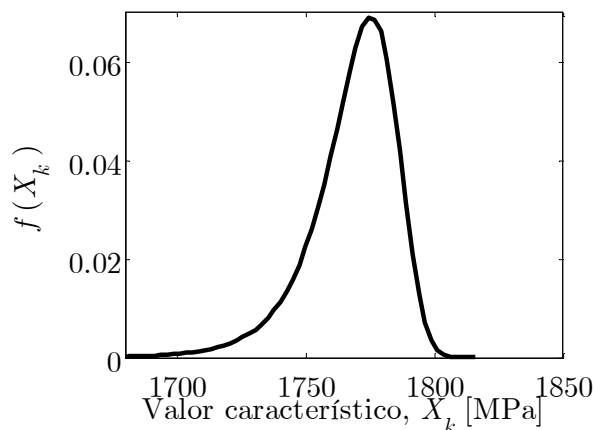


Figura 5.5: Distribuição *a posteriori* do valor característico X_k da tensão limite convencional de proporcionalidade.

Determine-se agora uma estimativa mais conservadora de X_k , mais precisamente uma estimativa que tenha uma probabilidade de 0.95 de ser excedida. Deseja determinar-se então $X_{k1} : P(X_k > X_{k1}) = 0.95$. Obteve-se $X_{k1} = 1736$ MPa que é apenas 1.6% inferior à estimativa Bayesiana, o que corrobora a conclusão acima de que a incerteza estatística tem um impacto relativamente pequeno no valor característico da população em estudo. A amostra disponível tem assim dimensão perfeitamente suficiente para efeitos de estimativa do valor característico, não se justificando procurar informação adicional, excepto, naturalmente, se existirem dúvidas sobre a representatividade da amostra.

O conceito de representatividade será usado nos Capítulos 6 e 7. Embora se trate de um conceito intuitivo, julga-se oportuno clarificar melhor o que se entende por representatividade de uma amostra. Considere-se uma população X com FDP $f_X(x)$ e suponha-se que se deseja obter uma amostra representativa dessa população constituída por 8 elementos. Divida-se o domínio da população X em 8 intervalos de modo a que a cada intervalo corresponda uma probabilidade de $1/8 = 0.125$, como indicado na Figura 5.6. A amostra que se obtém seleccionando o ponto médio de cada intervalo é uma amostra com boa representatividade da população X .

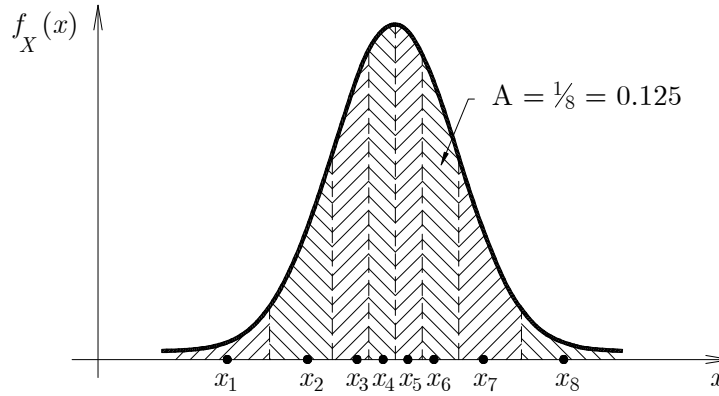


Figura 5.6: Ilustração de como se pode obter uma amostra com boa representatividade de uma população.

5.4 Impacto da incerteza estatística nos coeficientes de segurança

Estude-se agora o impacto da incerteza estatística nos coeficientes parciais de segurança de parâmetros de resistência. Recorde-se que o valor de dimensionamento X_d de uma variável de resistência X , a ser usado em verificações de segurança de nível I, é dado por $X_d = X_k / \gamma_m$, onde X_k representa o valor característico e γ_m é factor parcial de segurança. Assim,

$$\gamma_m = \frac{X_k}{X_d}. \quad (5.17)$$

Se se adoptar para X_d o valor de X no ponto de dimensionamento FORM de um determinado estado limite, então $X_d = F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))$ (Val & Stewart, 2002), onde α_X representa o coeficiente de sensibilidade de X , β é o índice de fiabilidade associado a esse estado limite e $\Phi(\cdot)$ é a cumulante da distribuição Normal reduzida. Para parâmetros de resistência dominantes, a Norma NP EN 1990 (2009) estabelece $\alpha_X = 0.80$ como valor padrão. Para estados limites últimos, a mesma Norma recomenda $\beta = 3.8$ para um período de referência de 50 anos (classe de fiabilidade RC2). Por conseguinte, a estimativa preditiva de γ_m (ou estimativa Bayesiana) é dada por:

$$\hat{\gamma}_m = \frac{X_k}{X_d} = \frac{F_X^{-1}(0.05)}{F_X^{-1}(\Phi(-0.8 \times 3.8))} = \frac{1 + t(0.05, n-1) \sqrt{1 + \frac{1}{n} V_X}}{1 + t(\Phi(-3.04), n-1) \sqrt{1 + \frac{1}{n} V_X}}, \quad (5.18)$$

onde $t(p, \nu)$ representa a inversa de uma distribuição t-Student com ν graus de liberdade avaliada na probabilidade p e n é a dimensão da amostra disponível,

usada para estimar o coeficiente parcial de segurança. Para o exemplo que se tem vindo a considerar obteve-se $\hat{\gamma}_m = 1.04$. Como se sabe, o coeficiente de segurança preconizado nos eurocódigos (e também na regulamentação Portuguesa vigente nas últimas décadas) é de 1.15, superior portanto ao valor obtido acima. Deve-se ter presente, porém, que o factor 1.15 contempla outras fontes de incerteza (além da incerteza na resistência), incluindo incerteza na área das armaduras e sua posição nas secções de betão, incerteza na geometria destas e ainda a incerteza nos modelos de resistência (modelos que transformam variáveis básicas em esforços resistentes).

Considere-se agora a estimativa de γ_m sem levar em conta a incerteza estatística. A expressão a usar será o limite de (5.18) quanto $n \rightarrow \infty$, isto é:

$$\hat{\gamma}_{m0} = \frac{X_k}{X_d} = \frac{1 - 1.645 V_X}{1 - 3.04 V_X}, \quad (5.19)$$

Usando a Eq. (5.19) obteve-se $\hat{\gamma}_{m0} = 1.02$, que não é muito diferente da estimativa Bayesiana acima, podendo então concluir-se que a amostra de resistências disponível pode ser considerada de dimensão apropriada para efeitos de determinação do coeficiente parcial de segurança.

Analise-se agora o efeito da incerteza estatística no coeficiente parcial de segurança duma variável de resistência genérica. A Figura 5.7 mostra o gráfico de $\hat{\gamma}_m$ (Eq. (5.18)) em função da dimensão da amostra n , para diferentes valores do coeficiente de variação V_X . Como se pode ver, o factor parcial de segurança é fortemente dependente do coeficiente de variação e decresce à medida que a dimensão da amostra aumenta. A título de exemplo, considere-se uma amostra com $V_X = 0.20$. O factor de segurança sem considerar a incerteza estatística (Eq. (5.19)) é de $\hat{\gamma}_{m0} = 1.71$. Este é assim o coeficiente de segurança que seria obtido se a amostra tivesse dimensão infinita. A dimensão da amostra que conduziria a $\hat{\gamma}_m = 1.8$ (acrécimo de cerca de 5%) seria de aproximadamente 50. Considere-se agora uma variável com $V_X = 0.10$. A Eq. (5.19) conduz a $\hat{\gamma}_{m0} = 1.20$. A dimensão da amostra que resultaria num coeficiente de segurança $\hat{\gamma}_m = 1.26$ (acrécimo de 5%) seria de aproximadamente 20. Estas considerações mostram que para as situações correntes (coeficientes de variação entre 0.10 e 0.20) a dimensão da amostra associada a uma penalização no coeficiente de segurança não muito significativa oscila entre 20 e 50.

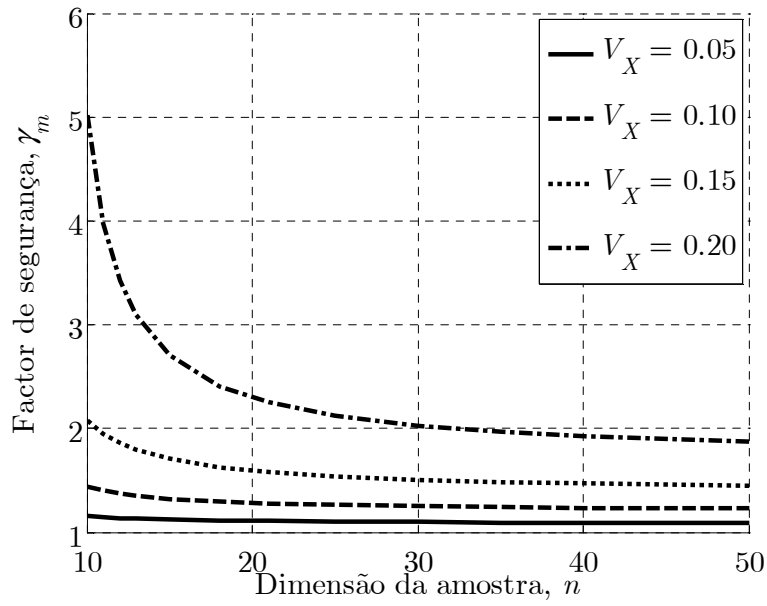


Figura 5.7: Efeito da dimensão da amostra nos coeficientes parciais de segurança de variáveis de resistência dominantes.

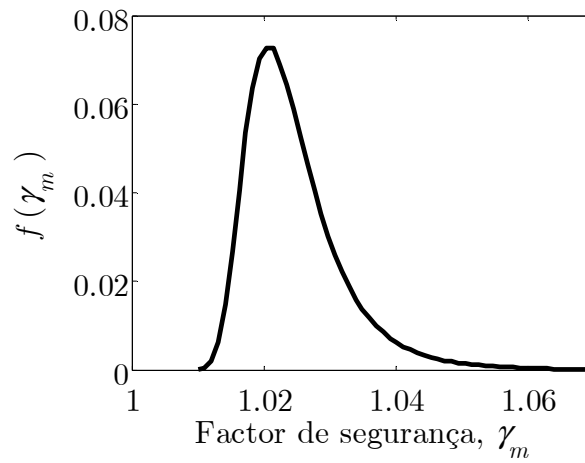


Figura 5.8: Densidade de probabilidade *a posteriori* do factor de segurança, γ_m . Esta distribuição descreve a incerteza em γ_m , depois da observação da amostra ε .

Tal como na secção anterior, o impacto da incerteza estatística no factor parcial de segurança $\gamma_m = X_k / X_d$ pode também ser avaliado modelando γ_m como variável aleatória. Tal será possível expressando γ_m como função de μ e σ . Tem-se:

$$\gamma_m = \frac{X_k}{X_d} = \frac{\mu - 1.645\sigma}{\mu - 3.04\sigma}. \quad (5.20)$$

Gerando amostras de μ e σ a partir de (5.1), a equação acima permite obter uma amostra de γ_m , a partir da qual se podem determinar todas as quantidades desejadas, sendo a média e o desvio padrão as mais importantes. Para a média obteve-se $\mu_{\gamma_m} = 1.024$, que pode ser considerada uma boa estimativa de γ_m , e para o desvio padrão obteve-se $\sigma_{\gamma_m} = 0.008$, que pode ser interpretado como uma medida do erro ou incerteza (estatística) nessa estimativa. Tratando-se de um erro bastante pequeno (erro relativo de apenas 0.78%), pode concluir-se que a amostra disponível tem dimensão suficiente para efeitos de estimativa do coeficiente de segurança, tal como já se havia concluído. A Figura 5.8 mostra a distribuição de probabilidade de γ_m obtida através do método de MC.

5.5 Impacto da incerteza estatística no índice de fiabilidade

Nesta secção investiga-se o impacto da incerteza estatística no índice de fiabilidade β . Para esse efeito vai recorrer-se ao exemplo que se tem vindo a considerar, sendo necessário, porém, acrescentar alguns dados. Recorde-se que se está a avaliar a segurança de uma ponte existente, cujo cenário crítico é a rotura por flexão numa determinada secção do tabuleiro. A fim de proceder a uma avaliação mais realista da segurança da ponte, consultaram-se os registos de obra, a partir dos quais foi possível colher a amostra de resistências do aço de pré-esforço apresentada em 5.2.3. Admita-se que a secção do tabuleiro tem a geometria e os materiais indicados na Figura 5.9. Como indicado, a secção é pré-esforçada com 4 cabos de 25 cordões de 15.2 mm, totalizando uma área de $A_p = 4 \times 25 \times 1.4 = 140 \text{ cm}^2$. A armadura passiva é constituída por 8 varões de 25 mm, a que corresponde a área $A_s = 8 \times 4.91 = 39.3 \text{ cm}^2$.

A função estado limite de interesse é $Z = M_R - M_E$, onde M_R e M_E representam, respectivamente, o momento resistente e momento actuante na secção. O problema de fiabilidade consiste em avaliar a probabilidade $p_f = P(M_E > M_R) = P(Z < 0)$ e determinar o correspondente índice de fiabilidade, dado por $\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$.

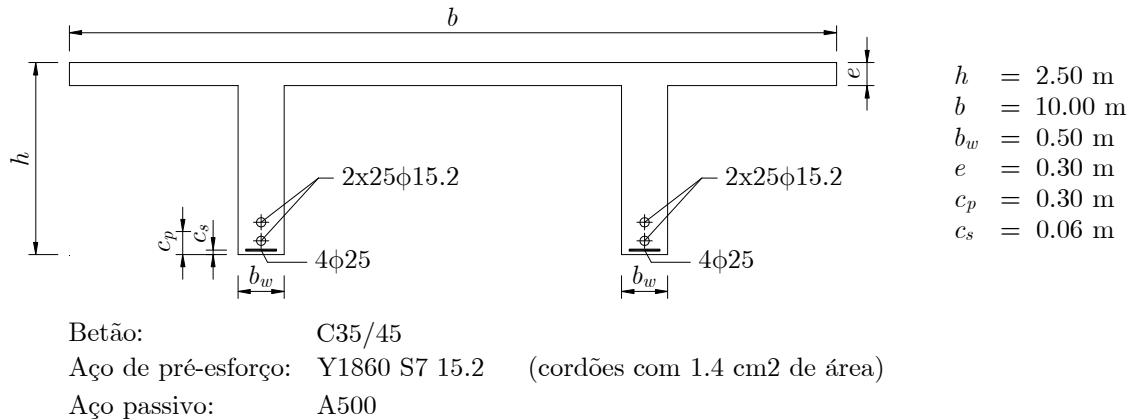


Figura 5.9: Secção de meio vão do tabuleiro da ponte em estudo.

A Tabela 5.1 mostra as distribuições de probabilidade das variáveis básicas do problema em estudo. Relativamente à resistência do aço de pré-esforço, adoptou-se o modelo preditivo Bayesiano, que tem em conta a dimensão da amostra de resistências usada (9, no presente caso). Para uma justificação mais detalhada dos restantes modelos adoptados, ver Jacinto *et al.* (2008).

Tabela 5.1: Variáveis básicas do exemplo em estudo.

Variável		Un.	Distribuição	Parâmetros		
Designação	Abrev.					
Momento actuante	M_E	kNm	Normal	$\mu = 46000$	$\sigma = 3200$	-
Resistência do aço de pré-esforço	$f_{p0.1}$	MPa	t-Student	$a = 1816$	$b = 28$	$\nu = 8$
Resistência das armaduras passivas	f_{sy}	MPa	Normal	$\mu = 560$	$\sigma = 30$	-
Resistência do betão	f_c	MPa	Normal	$\mu = 35$	$\sigma = 4.2$	-
Área de pré-esforço	A_p	cm ²	Normal	$\mu = 140$	$\sigma = 1.4$	-
Área das armaduras passivas	A_s	cm ²	Normal	$\mu = 39.3$	$\sigma = 0.39$	-
Cota dos cabos de pré-esforço	c_p	m	Uniforme	$a = 0.28$	$b = 0.32$	-
Cota das armaduras passivas	c_s	m	Uniforme	$a = 0.05$	$b = 0.07$	-

O problema foi analisado com o método de MC, tendo-se obtido $\beta = 4.1$. Ignorando a incerteza estatística na resistência do aço, isto é, adoptando o modelo $f_{p0.1} \sim N(\mu = \bar{x}, \sigma^2 = s^2)$, com $\bar{x} = 1816.3$ MPa e $s^2 = 26.6^2$ MPa², obteve-se $\beta = 4.2$, que é apenas ligeiramente superior ao valor anterior. Isto indica que a incerteza estatística em $f_{p0.1}$ tem um impacto relativamente pequeno no índice de fiabilidade estimado. Esta conclusão está de acordo com os resultados obtidos anteriormente em relação ao coeficiente parcial de segurança. A amostra colhida dos registos de obra (dimensão igual a 9) pode então ser considerada como tendo dimensão razoável para efeitos de estimativa da fiabilidade.

Esta conclusão pode constituir à partida alguma surpresa, conhecendo-se a importância que as caudas das distribuições têm nos problemas de fiabilidade (e tendo em conta que a amostra tem uma dimensão relativamente pequena). A razão para esta conclusão tem a ver com o facto do coeficiente de variação da amostra disponível ser muito baixo ($V = 0.015$). Se a amostra disponível tivesse um coeficiente de variação $V = 0.03$ — que ainda é razoável para aços de pré-esforço (Jacinto *et al.*, 2011) —, a fiabilidade da estrutura seria de $\beta = 3.8$ sem considerar a influência da incerteza estatística e $\beta = 3.5$ considerando a incerteza estatística. Neste caso a incerteza estatística implicaria uma redução de cerca de 8% no índice de fiabilidade, que já tem algum significado (a probabilidade de falha mais do que duplicaria). Estas considerações mostram que a incerteza estatística pode penalizar severamente as estimativas do índice de fiabilidade, e portanto não deve ser ignorada.

A avaliação do impacto da incerteza estatística no índice de fiabilidade pode ainda ser avaliada adoptando uma estratégia idêntica à já adoptada na estimativa de valores característicos e coeficientes parciais de segurança. Antes de se analisar o exemplo em concreto, considere-se uma função estado limite genérica $Z = g(X)$, onde $X = (X_1, \dots, X_k)$ representa o vector das variáveis básicas. Denotando a distribuição conjunta do vector $X = (X_1, \dots, X_k)$ por $f_X(X)$, a probabilidade de violação desse estado limite é dada por:

$$p_f = P(Z < 0) = \int_{D_f} f_X(X) dX, \quad (5.21)$$

onde $D_f = \{X : g(X) < 0\}$ representa o domínio correspondente aos estados de falha no espaço k -dimensional das variáveis básicas. A distribuição $f_X(X)$ depende naturalmente de certos parâmetros. Seja $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ o vector definidor desses parâmetros. Para enfatizar que a distribuição $f_X(X)$ depende desses parâmetros, ou que está condicionada aos valores particulares que esses parâmetros podem assumir, represente-se a distribuição conjunta por $f_X(X | \theta)$. Isto significa que a probabilidade de falha e o índice de fiabilidade dependem também desses parâmetros, podendo escrever-se:

$$p_f = p_f(\theta) = \int_{D_f} f_X(X | \theta) dX, \quad (5.22)$$

$$\beta = \beta(\theta) = -\Phi^{-1}(p_f(\theta)). \quad (5.23)$$

A probabilidade $p_f(\theta)$ representa a probabilidade de falha condicionada ao valor particular θ , sendo por isso uma função de θ , o mesmo sucedendo com o índice de fiabilidade $\beta(\theta)$. Ora, uma vez que os parâmetros θ são modelados como variáveis aleatórias (por serem desconhecidos), a probabilidade de falha p_f e o índice de fiabilidade β , por serem funções de θ , são eles próprios variáveis aleatórias

(Kiureghian, 2008). Sendo variáveis aleatórias, têm as suas próprias distribuições de probabilidade, assim como médias e desvios padrão. Seja μ_β e σ_β a média e o desvio padrão de β . O desvio padrão σ_β constitui uma medida da incerteza (estatística) em β , sendo por conseguinte útil na avaliação do impacto da incerteza estatística no problema em estudo.

Kiureghian & Ditlevsen (2009) analisaram o problema de fiabilidade de duas variáveis básicas, X_1 e X_2 , com função estado limite dada por $Z = g(X_1, X_2) = X_1 - X_2$. Esses autores analisaram o caso em que $X_1 \sim N(\theta_1, \sigma_1)$ e que $X_2 \sim N(\theta_2, \sigma_2)$, onde as médias θ_1 e θ_2 são desconhecidas (e portanto modeladas como variáveis aleatórias), mas os desvios padrão σ_1 e σ_2 são conhecidos. Se se admitir adicionalmente que X_1 e X_2 são independentes, então, uma vez que X_1 e X_2 são normalmente distribuídas, o índice de fiabilidade é dado por:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \quad (5.24)$$

As distribuições *a posteriori* de θ_1 e θ_2 são normalmente distribuídas, resultado este que advém do facto de se admitirem conhecidos os desvios padrão das variáveis básicas X_1 e X_2 (Ang & Tang, 2007). Observando (5.24), constata-se que β é uma combinação linear de variáveis normalmente distribuídas, pelo que β é também normalmente distribuída, donde, por exemplo:

$$P(\mu_\beta - \sigma_\beta < \beta < \mu_\beta + \sigma_\beta) = 0.68.$$

Como se disse acima, σ_β constitui uma medida da incerteza em β e, de acordo com a terminologia usual da Estatística, poder ser correctamente designado por erro padrão na estimativa $\hat{\beta} = \mu_\beta$. Pode demonstrar-se que, sob as hipóteses acima, a distribuição de β é dada por:

$$f(\beta) = N\left(\beta \mid \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (5.25)$$

onde \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são as médias das amostras disponíveis de X_1 e X_2 , e n a dimensão dessas amostras. É claro que se trata de um problema com interesse principalmente teórico, pois na prática é mais comum existir incerteza em ambos os parâmetros das variáveis X_1 e X_2 . No entanto, o resultado acima mostra que numa situação mais real não surpreenderá que a distribuição do índice de fiabilidade possa ser aproximada por uma distribuição Normal.

Considere-se novamente o problema introduzido no início desta secção. Apresenta-se de seguida um algoritmo que permite obter uma amostra de β . Recorde-se que a resistência do aço de pré-esforço (tensão limite convencional de proporcionalidade)

está a ser caracterizada a partir de uma amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ colhida dos registos de obra. No algoritmo que segue, \bar{x} e s^2 representam a média e variância dessa amostra. Está a admitir-se que $f_{p0.1} \sim N(\mu = \theta_1, \sigma^2 = \theta_2)$, com incerteza em ambos os parâmetros. Procede-se assim:

- 1) gera-se $\{\theta_2(1), \dots, \theta_2(n_t)\} \sim GI((n-1)/2, [(n-1)/2]s^2)$;
- 2) gera-se $\{\theta_1(1), \dots, \theta_1(n_t)\} \sim N(\bar{x}, \theta_2/n)$, sendo $\theta_2 = \{\theta_2(1), \dots, \theta_2(n_t)\}$ a amostra gerada no passo anterior.
- 3) para $i = 1, \dots, n_t$
 gera-se $\{f_{p0.1}(1), \dots, f_{p0.1}(n_s)\} \sim N(\theta_1(i), \theta_2(i))$;
 geram-se amostras das restantes variáveis básicas, também com dimensão n_s .
 avalia-se $p_f(i)$ recorrendo ao método de MC ordinário;
 determina-se $\beta(i) = -\Phi^{-1}(p_f(i))$;
- 4) analisa-se estatisticamente a amostra $\{\beta(1), \dots, \beta(n_t)\}$, obtida no passo anterior.

O algoritmo acima foi implementado em linguagem MATLAB, tendo-se considerado $n_t = 50\,000$ e $n_s = 1\,000\,000$. Apresentam-se de seguida alguns dos resultados obtidos. A Figura 5.10 mostra o histograma da probabilidade de falha e correspondente índice de fiabilidade. Relativamente aos momentos de β obtiveram-se $\mu_\beta = 4.2$ e $\sigma_\beta = 0.15$, a que corresponde um coeficiente de variação de 0.035, que pode ser encarado como medida do erro relativo na estimativa $\hat{\beta} = \mu_\beta = 4.2$. Tratando-se de um erro relativo relativamente pequeno (3.5%), pode concluir-se que a incerteza em β é relativamente pequena, o que está em harmonia com as conclusões anteriores.

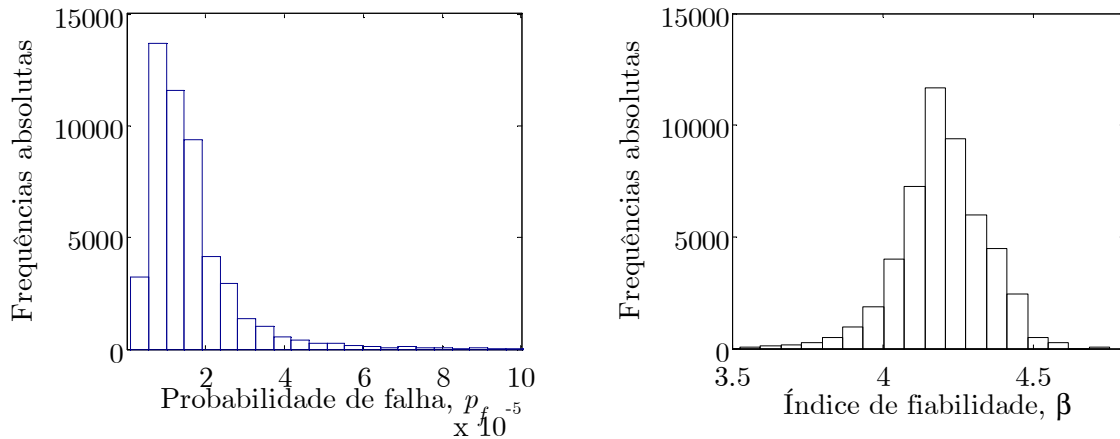


Figura 5.10: histogramas *a posteriori* da probabilidade de falha e do índice de fiabilidade.

Recorde-se que a estimativa Bayesiana (ou valor preditivo) de β foi de 4.1. A modelação de β como variável aleatória torna possível calcular a probabilidade $P(\beta > 4.1)$, para a qual se obteve 0.78. Isto significa que a confiança de que o verdadeiro índice de fiabilidade é superior a 4.1 é de 0.78. A estimativa de β que daria uma confiança de 0.95 é 3.95, que não é muito diferente da estimativa Bayesiana, o que confirma que a incerteza (estatística) no índice de fiabilidade é relativamente pequena. Pode-se ainda encontrar um intervalo de credibilidade que corresponda, por exemplo, a uma probabilidade de cobertura de 0.95. O intervalo $[3.87, 4.47]$ é o intervalo centrado (isto é, de abas iguais) com essa probabilidade de cobertura, isto é, $P(3.87 < \beta < 4.47) = 0.95$. Este intervalo constitui também uma boa medida da incerteza (estatística) em β .

5.6 Considerações finais

A percepção da magnitude da incerteza estatística é de grande importância, pois ajuda a avaliar até que ponto a dimensão das amostras disponíveis é suficiente, e consequentemente avaliar até que ponto se justifica colher informação adicional com o objectivo de reduzir essa incerteza. Neste capítulo analisou-se o impacto da incerteza estatística nos valores característicos e coeficientes parciais de segurança de parâmetros de resistência. Estudou-se também o impacto da incerteza estatística no índice de fiabilidade dum exemplo concreto.

Empregaram-se dois métodos: o primeiro método consiste em comparar a estimativa Bayesiana da quantidade de interesse com a estimativa que seria obtida se a amostra tivesse dimensão infinita (incerteza estatística nula); o segundo método, ligeiramente mais complexo, mas também mais potente, consiste em modelar a quantidade a estimar como variável aleatória, gerar através do método de MC uma amostra suficientemente grande dessa variável e a partir dessa amostra esboçar a sua distribuição *a posteriori*, assim como determinar os respectivos momentos (média e desvio padrão) e ainda intervalos de credibilidade. O desvio padrão constitui uma boa medida da incerteza estatística na quantidade estimada.

A aplicação destes métodos foi ilustrada por meio de um exemplo envolvendo uma amostra com apenas nove valores. O estudo mostrou que uma amostra pode ter dimensão relativamente pequena e ainda assim originar incerteza estatística moderada. De facto, a dimensão dum amostra não constitui por si só uma medida da incerteza estatística. Esta depende também do coeficiente de variação da amostra e do tipo de quantidade que estiver a ser estimada. Quanto maior for o coeficiente de variação amostral e quanto mais afastada da média da população estiver a quantidade que se pretende estimar, maior é o impacto da incerteza estatística.

Uma vez que a amostra disponível conduziu a níveis de incerteza relativamente pequenos, concluiu-se que não haveria necessidade de colher informação adicional a respeito da resistência dos aços. Como é evidente, esta conclusão pressupõe que a amostra disponível é representativa de todo o aço empregue na ponte, como seria por exemplo o caso de se conhecer à partida que a ponte empregou apenas 9 bobines de aço (aproximadamente 30 toneladas do aço). O problema da representatividade e da incerteza por ela originada será considerada no próximo capítulo, onde se estuda o problema da combinação de informação amostral com informação anterior.

Capítulo 6

Atualização Bayesiana — variáveis de resistência

6.1 Considerações iniciais

Uma das vantagens da abordagem Bayesiana reside na possibilidade de juntar à informação contida numa amostra de uma população, conhecimento anterior que possa existir a respeito dessa população. Esta possibilidade é particularmente vantajosa nos casos em que a amostra disponível induz incerteza significativa. Neste capítulo estuda-se o problema da combinação de informação amostral (colhida de uma estrutura em avaliação) com informação obtida de bibliografia na forma de uma recomendação referente ao modelo amostral (modelo probabilístico da população). Trata-se de uma situação de grande interesse prático, tendo em conta o facto de existirem documentos dedicados e esse tipo de recomendações, e portanto com informação valiosa que pode ser aproveitada no sentido de complementar a informação colhida da ponte. Um desses documentos é o *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a) que refere: *one may use the distributions as a start for updating in the presence of specific structure related data and as a basis for optimisation.*

O presente Capítulo, à semelhança do anterior, dá ênfase ao caso em que a população a estudar é uma variável básica de resistência com distribuição Normal e ambos os parâmetros desconhecidos. Embora o estudo a desenvolver focalize o modelo Bayesiano de uma população Normal, pode ser usado como referência no estudo de outros tipos de população.

6.2 Combinação de informação amostral com informação obtida de bibliografia

Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma ponte existente e que uma variável básica do problema é a variável X , para a qual se dispõe de uma recomendação colhida de bibliografia da forma:

$$f_X(x) = N(x \mid \mu_{X0}, \sigma_{X0}^2). \quad (6.1)$$

Suponha-se, além disso, que foi possível obter da estrutura em avaliação uma amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ dessa população (por meio de consulta de registos de obra ou através de ensaios). A questão que se coloca é como combinar a informação contida nessa amostra com a informação contida no modelo (6.1).

Recorda-se que quando se materializa a informação anterior na conjugada natural do modelo Normal, a distribuição *a priori* dos parâmetros μ e σ^2 tem a forma:

$$f(\mu, \sigma^2) = N(\mu \mid \mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}) \cdot GI(\sigma^2 \mid \alpha_0, \beta_0). \quad (6.2)$$

Assim, o problema consiste em determinar os hiperparâmetros μ_0 , n_0 , α_0 e β_0 consistentes com a recomendação (6.1). De um ponto de vista puramente matemático, este problema pode parecer sem solução, na medida em que os parâmetros μ e σ^2 estão a ser modelados como variáveis aleatórias e a recomendação (6.1) fixa o valor desses parâmetros (respectivamente em μ_{X0} e σ_{X0}^2). No entanto, no contexto deste problema, o modelo (6.1) deve ser visto simplesmente como um mecanismo gerador de valores de X , os quais contêm informação (probabilística) a respeito dos parâmetros μ e σ^2 , informação essa que se pretende captar.

A fim de encontrar uma solução para o problema acima, note-se, em primeiro lugar, que o modelo (6.1), cuja média é μ_{X0} , é comparável ao modelo preditivo *a priori* de X , dado por (ver Capítulo 5):

$$f_X(x) = St\left(x \mid \mu_0, \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \frac{\beta_0}{\alpha_0}}, 2\alpha_0\right). \quad (6.3)$$

Constata-se assim que a média (preditiva) de X coincide com o hiperparâmetro μ_0 , pelo que é lógico considerar $\mu_0 = \mu_{X0}$. Relativamente aos hiperparâmetros α_0 e β_0 , recorde-se que, quando a única informação disponível é do tipo amostral, a distribuição *a posteriori* de μ e σ^2 é dada por:

$$f(\mu, \sigma^2 \mid \varepsilon) = N(\mu \mid \bar{x}, \frac{\sigma^2}{n}) \cdot GI(\sigma^2 \mid \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} s^2). \quad (6.4)$$

Comparando esta equação com (6.2) parece razoável atribuir a α_0 e β_0 os seguintes valores:

$$\alpha_0 = \frac{n_0 - 1}{2}, \quad (6.5)$$

$$\beta_0 = \frac{n_0 - 1}{2} \sigma_{X_0}^2, \quad (6.6)$$

onde n_0 , recorde-se, designa-se por *dimensão da amostra equivalente a priori* e representa a dimensão de uma amostra hipotética (ou fictícia) contendo informação equivalente à informação *a priori*.

Assim, o problema da especificação dos hiperparâmetros ficará resolvido uma vez atribuído um valor a n_0 . Uma possibilidade consiste em atribuir um valor a n_0 por meio de juízo criterioso (*engineering judgment*), considerando que n_0 representa o peso relativo que μ_0 tem na média *a posteriori* $\mu_n = (n_0 \mu_0 + n \bar{x}) / (n_0 + n)$, onde \bar{x} e n representam, respectivamente, a média e dimensão da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ disponível. Assim, o parâmetro n_0 constitui o peso, ou credibilidade, que se pretende dar à informação anterior. Por exemplo, ao adoptar-se $n_0 = n$, isso significa que se está dar à informação *a priori* idêntico peso ao da informação amostral.

Outra possibilidade consiste em atribuir a n_0 um valor tal que um quantilho p do modelo (6.1) seja igual ao mesmo quantilho do modelo (6.3). Igualando então os quantis p dados por esses modelos, obtém-se a seguinte equação:

$$\mu_0 + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \frac{\beta_0}{\alpha_0}} t(p, 2\alpha_0) = \mu_{X_0} + \sigma_{X_0} z(p), \quad (6.7)$$

onde $t(\cdot, \cdot)$ e $z(\cdot)$ representam as inversas das distribuições acumuladas t-Student e Normal, respectivamente. Uma vez que $\mu_0 = \mu_{X_0}$, esta equação transforma-se em:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \frac{\beta_0}{\alpha_0}} t(p, 2\alpha_0) = \sigma_{X_0} z(p). \quad (6.8)$$

Por outro lado, dividindo (6.6) por (6.5) obtém-se $\beta_0 / \alpha_0 = \sigma_{X_0}^2$, donde (6.8) pode reescrever-se como:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \cancel{\sigma_{X_0}^2}} t(p, 2\alpha_0) = \cancel{\sigma_{X_0}} z(p). \quad (6.9)$$

Substituindo nesta Eq. α_0 por $(n_0 - 1) / 2$, tem-se finalmente:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n_0}} t(p, n_0 - 1) = z(p). \quad (6.10)$$

A única solução desta Eq. é $n_0 = \infty$, para qualquer valor de p . Em certa medida este resultado não constitui surpresa. De facto, uma vez que a recomendação (6.1) fixa os parâmetros μ e σ^2 , o que equivale a afirmar que não existe incerteza nesses parâmetros ou que os parâmetros foram estimados a partir de uma amostra infinita, então é lógico que essa recomendação conduza a $n_0 = \infty$.

O valor $n_0 = \infty$ cria algumas dificuldades numéricas. Contudo, para efeitos práticos pode-se adoptar $n_0 = 50$, o que representa uma importante redução na incerteza estatística. Deve-se enfatizar, porém, que a atribuição de um valor alto a n_0 equivale a dar elevada credibilidade à informação anterior. Quanto maior for n_0 , maior é o peso da informação anterior nas estimativas pretendidas, e consequentemente menor é o peso da informação amostral nessas mesmas estimativas.

Em resumo, quando a informação anterior é da forma $f_X(x) = N(x | \mu_{X0}, \sigma_{X0}^2)$, é possível especificar hiperparâmetros consistentes com essa informação, sendo necessário no entanto usar de juízo criterioso e atribuir um valor a n_0 , considerando que este constitui uma medida de credibilidade dessa informação. Os restantes hiperparâmetros obtêm-se por dedução, usando as expressões:

$$\mu_0 = \mu_{X0}; \quad \alpha_0 = \frac{n_0 - 1}{2}; \quad \beta_0 = \frac{n_0 - 1}{2} \sigma_{X0}^2. \quad (6.11)$$

6.3 Exemplos

6.3.1 Exemplo 1

Retomemos o exemplo apresentado no Capítulo anterior. Recorde-se que o exemplo trata da avaliação da segurança de uma ponte existente, tendo-se para o efeito colhido dos registos de obra a amostra $\varepsilon = \{1807, 1818, 1818, 1784, 1860, 1846, 1807, 1829, 1778\}$ de resistências do aço de pré-esforço usado na construção da ponte. A informação contida nessa amostra (valores da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1%, $f_{p0.1}$, em MPa), encontra-se resumida nas seguintes estatísticas:

$$n = 9; \quad \bar{x} = 1816.3 \text{ MPa}; \quad s = 26.6 \text{ MPa}.$$

Como se viu no Capítulo anterior, a amostra acima, apesar de pequena, conduz a níveis de incerteza relativamente pequenos, não se justificando adicionar-lhe informação — a não ser que haja dúvidas (ou incerteza) sobre a sua representatividade. Ainda assim, vai usar-se essa amostra com o intuito de ilustrar o mecanismo de combinação de informação apresentado na secção anterior, o que permitirá tirar algumas conclusões importantes.

Analise-se como se pode juntar à informação contida na amostra acima, a informação contida no modelo probabilístico recomendado pelo *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a) referente à variável em estudo, $X = f_{p0.1}$. Este documento recomenda, para aços da classe a que se refere a amostra acima (classe Y1860), o modelo Normal com os seguintes parâmetros: $\mu_{X0} = 0.85(1860 + 66) = 1637$ MPa e $\sigma_{X0} = 0.85 \times 40 = 34$ MPa. O modelo recomendado por esse documento é pois:

$$f_X(x) = N(x \mid \mu_{X0} = 1637, \sigma_{X0}^2 = 34^2) \text{ [MPa]}. \quad (6.12)$$

Assim, de acordo com o exposto anteriormente, $\mu_0 = 1637$ MPa. Atribuindo ao modelo acima um peso de $n_0 = 50$, tem-se para os restantes hiperparâmetros: $\alpha_0 = (50 - 1) / 2 = 24.5$ e $\beta_0 = (50 - 1) / 2 \times 34^2 = 28\,322$ MPa². Estes valores conduzem ao seguinte modelo preditivo *a priori* (Eq. (6.3)):

$$f_X(x) = St(x \mid a = 1637, b = 34.3, \nu = 49) \text{ [MPa]}, \quad (6.13)$$

que se encontra representado na Figura 6.1 em conjunto com o modelo (6.12). Conforme se observa, há uma coincidência quase perfeita entre estes modelos, o que sugere que os hiperparâmetros estimados acima são consistentes com a informação anterior usada.

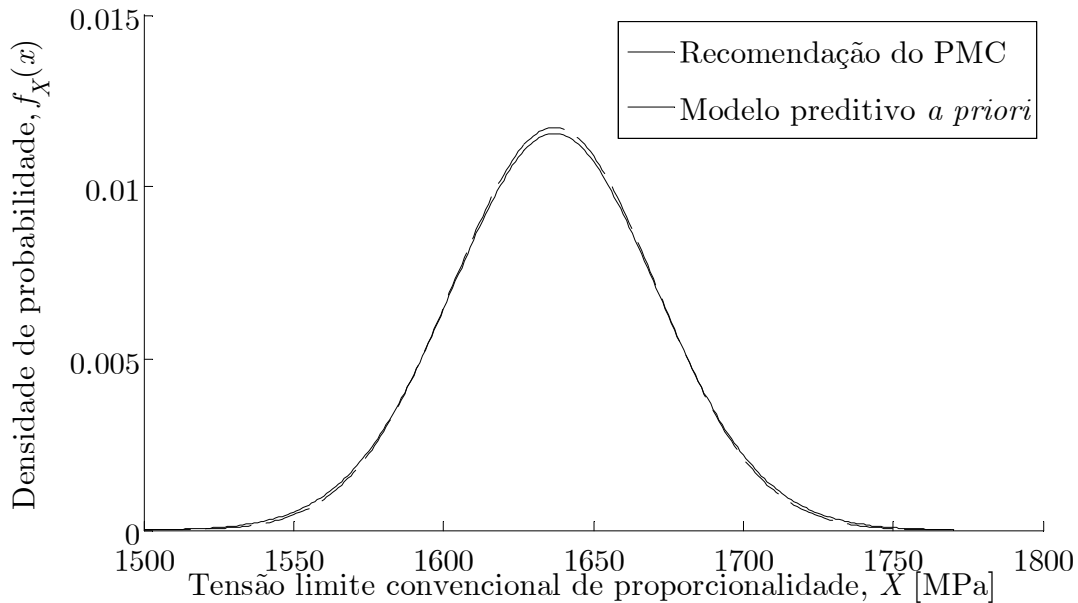


Figura 6.1: Modelo probabilístico recomendado pelo *Probabilistic Model Code* (PMC) e modelo preditivo *a priori* obtido dessa recomendação.

O valor característico que se obtém do modelo preditivo *a priori* é:

$$\hat{X}_{k0} = \mu_0 + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \frac{\beta_0}{\alpha_0}} t(0.05, 2\alpha_0) = 1579 \text{ MPa}. \quad (6.14)$$

Recorde-se que o valor obtido considerando unicamente informação amostral foi $\hat{X}_k = 1764$ MPa. Este valor é superior a \hat{X}_{k0} , o que não constitui surpresa, atendendo a que a informação amostral é mais favorável que a informação *a priori*, como se resume na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Resumos estatísticos das informações amostral e anterior.

Informação amostral	Informação anterior
$\bar{x} = 1816$ MPa	$\mu_{X0} = 1637$ MPa
$s = 26.6$ MPa	$\sigma_{X0} = 34$ MPa
$\hat{X}_k = 1764$ MPa	$\hat{X}_{k0} = 1579$ MPa

Combinando agora as duas fontes de informação (amostral e anterior) obtêm-se os seguintes hiperparâmetros *a posteriori*: $\mu_n = 1664$ MPa; $n_n = 59$; $\alpha_n = 29$; $\beta_n = 153\,750$ MPa², que conduzem ao seguinte modelo preditivo:

$$f_X(x | \varepsilon) = St(x | a = 1664, b = 73.4, \nu = 58) \text{ [MPa]}. \quad (6.15)$$

A este modelo corresponde o valor característico de 1542 MPa, que, como se constata, é inferior a qualquer dos valores que constam na Tabela 6.1. À partida este pode parecer um resultado inesperado. Efectivamente, ao combinar informação anterior com informação amostral, seria de esperar obter uma estimativa de X_k compreendida entre a que se obtém considerando apenas informação anterior e a que se obtém considerando apenas informação amostral.

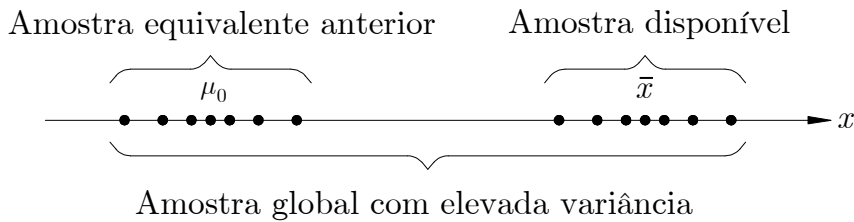


Figura 6.2: Efeito causado pela combinação de informação anterior e informação amostral com médias significativamente diferentes.

Uma breve análise dos modelos probabilísticos envolvidos mostra a razão para o sucedido. O desvio padrão do modelo (6.15) é igual a 74.7 MPa, que é claramente superior quer ao desvio padrão amostral, s , quer ao desvio padrão do modelo anterior, σ_{X0} . Quer dizer, a combinação da informação anterior com a informação amostral originou um incremento da variância, que teve como consequência baixar o valor característico. Esta situação, que se esquematiza na Figura 6.2, decorre do facto

de existir uma diferença apreciável entre a média anterior, μ_{X_0} , e a média amostral, \bar{x} . De facto $\bar{x} - \mu_{X_0} = 179$ MPa que é bastante superior ao desvio padrão amostral.

Convém referir que ao combinar informação amostral com informação anterior, a incerteza estatística (traduzida no parâmetro $n_n = n + n_0$) decresceu, pois $n_n > n_0$. Apesar disto, há um aumento global da incerteza. Na Figura 6.3 representam-se as distribuições de probabilidade dos três modelos preditivos envolvidos na análise: (1) modelo preditivo *a priori* (que resultou da recomendação do PMC), (2) modelo preditivo *a posteriori* considerando unicamente informação amostral e (3) modelo preditivo *a posteriori* considerando as informações combinadas (amostral e *a priori*). Como se observa, o último possui dispersão superior. Observe-se que os modelos *a priori* e amostral dizem respeito a aço da mesma classe (aço Y1860), pelo que supostamente pertencem à mesma população. É pois apropriado questionar a credibilidade da informação anterior, bem como se é aplicável à estrutura em avaliação. Relativamente à amostra disponível, deve-se analisar também a sua credibilidade, bem como se é ou não representativa de todo o aço empregue na ponte.

Antes de se examinar mais em pormenor estas questões, analise-se o que acontece se se atribuir à informação anterior um peso (ou credibilidade) menor, digamos $n_0 = 3$. A Figura 6.4 mostra os modelos preditivos obtidos. O valor característico agora obtido (considerando as informações anterior e amostral combinadas) é de 1612 MPa. Conforme se observa, o modelo preditivo desloca-se para a direita (a média aumenta), mas a variância permanece com valor elevado (comparativamente com a variância anterior e amostral).

Este efeito (aumento da variância) mostra que se deve ser criterioso ao combinar informação amostral (colhida de uma estrutura em avaliação) com informação anterior colhida de bibliografia. Não se deve combinar as duas fontes de informação sem antes efectuar uma análise com as informações em separado. Se, ao combinar as informações, ocorrer um aumento da incerteza é importante analisar a credibilidade dessas fontes de informação.

Voltando ao exemplo que se tem vindo a estudar, a amostra disponível (colhida dos registos de construção da ponte) deverá ser à partida considerada credível. De facto, só em última instância se deve questionar os valores que constam em certificados de qualidade emitidas por empresas com sistema de gestão de qualidade implementado. Relativamente à representatividade da amostra, são legítimas algumas dúvidas. De facto, sabe-se que a ponte em questão empregou mais aço do que o correspondente às bobines amostradas. Resta examinar a credibilidade da informação *a priori* usada, assunto a tratar na próxima sub-secção.

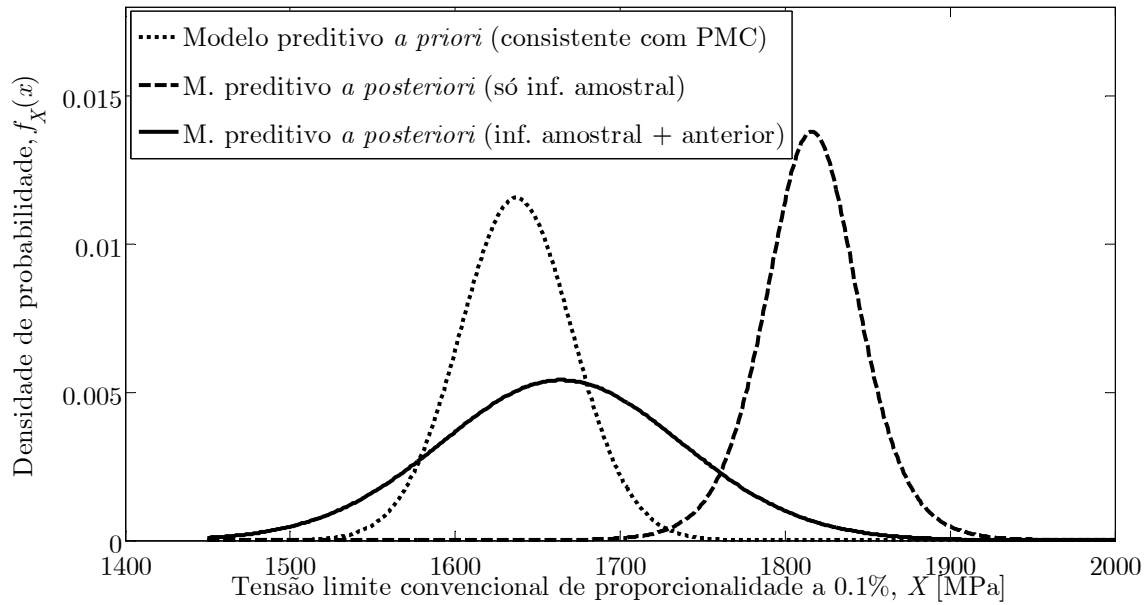


Figura 6.3: Modelos preditivos considerando informação anterior equivalente a uma amostra com dimensão $n_0 = 50$.

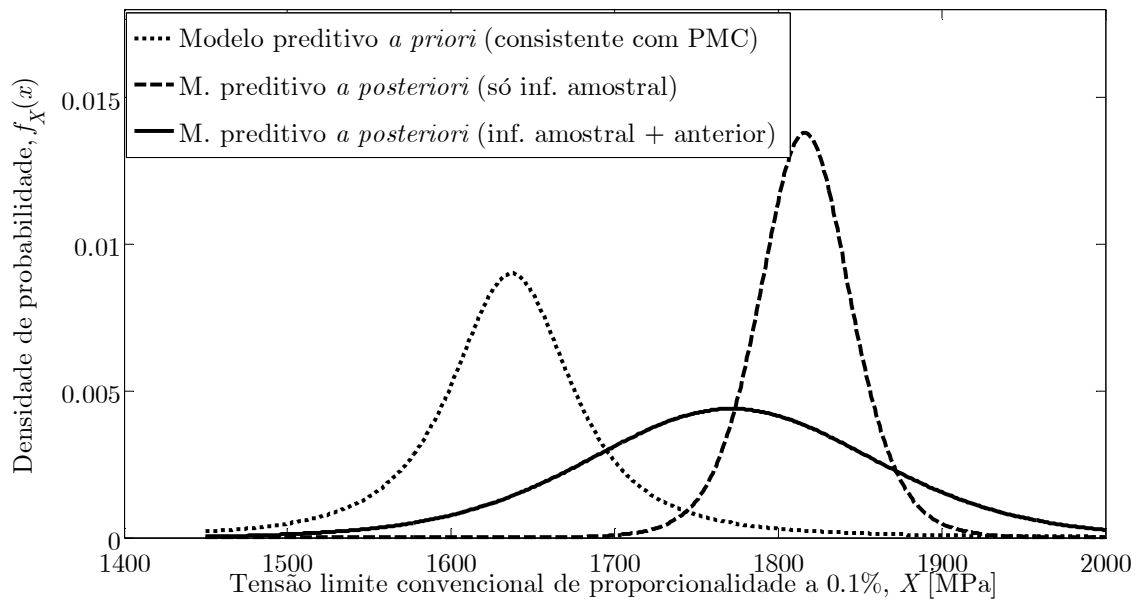


Figura 6.4: Modelos preditivos considerando informação anterior equivalente a uma amostra com dimensão $n_0 = 3$.

6.3.2 Análise da credibilidade do modelo proposto pelo *Probabilistic Model Code*

Com o objectivo de analisar a credibilidade do modelo proposto pelo PMC, consultaram-se os dados que serviram de base a um estudo realizado por Jacinto *et al.* (2011). Este estudo trata da análise estatística de propriedades mecânicas de cordões de pré-esforço a partir de ensaios de tracção realizados no LNEC no âmbito da certificação desses produtos. Os ensaios abrangem o período entre 2001 e 2009 e envolvem trefilarias de vários países, incluindo Portugal, Espanha, Tailândia e Itália. O ano de construção da ponte em estudo (2005) está portanto abrangido por este período.

Na Tabela 6.2 indicam-se os valores da tensão limite convencional de proporcionalidade, em MPa, dos 131 ensaios de tracção estudados. De referir que cada valor refere-se a um único vazamento, pelo que a variabilidade da amostra reflecte a variabilidade entre vazamentos que, como se sabe, é superior à variabilidade num mesmo vazamento. Na Figura 6.5 mostra-se o histograma desta amostra, incluindo o modelo Normal ajustado à amostra (modelo com média e desvio padrão iguais aos da amostra).

Tabela 6.2: Amostra de resistências ($f_{p0.1}$) de cordões de pré-esforço [MPa].

1731	1785	1650	1712	1685	1661	1694	1802	1660	1730	1726
1758	1674	1697	1709	1698	1678	1728	1663	1698	1708	1664
1764	1692	1671	1703	1779	1780	1692	1740	1678	1746	1653
1739	1728	1615	1741	1691	1780	1779	1722	1660	1700	1551
1762	1766	1674	1706	1775	1773	1703	1630	1696	1579	1562
1789	1693	1715	1686	1758	1781	1755	1681	1562	1669	1716
1826	1701	1749	1685	1739	1676	1580	1640	1678	1711	1676
1703	1618	1657	1744	1745	1735	1626	1672	1654	1679	1705
1721	1750	1699	1713	1801	1701	1659	1605	1655	1664	1730
1702	1748	1737	1696	1731	1738	1678	1610	1685	1767	1710
1723	1715	1675	1705	1714	1729	1686	1617	1662	1718	1723
1732	1637	1703	1738	1759	1737	1656	1656	1679	1707	

Determine-se os hiperparâmetros μ_0 , n_0 , α_0 e β_0 que materializam a informação contida na amostra acima, doravante designada amostra LNEC. O hiperparâmetro μ_0 coincide com a média da amostra, que é de 1702 MPa. O hiperparâmetro n_0 é obviamente igual à dimensão da amostra, ou seja 131. Para os restantes tem-se: $\alpha_0 = (n_0 - 1) / 2 = 65$; $\beta_0 = [(n_0 - 1) / 2] \times s^2 = 172190 \text{ MPa}^2$. Estes hiperparâmetros conduzem ao seguinte modelo preditivo, doravante designado modelo preditivo *a priori* LNEC: $St(x | 1702, 51.7, 130)$. Na Figura 6.6 mostra-se o gráfico deste modelo,

assim como o gráfico do modelo Normal que se obteve por ajustamento ao histograma referido. Conforme se observa, estes modelos têm uma coincidência quase perfeita, o que permite concluir que a incerteza estatística associada à amostra LNEC é perfeitamente desprezável.

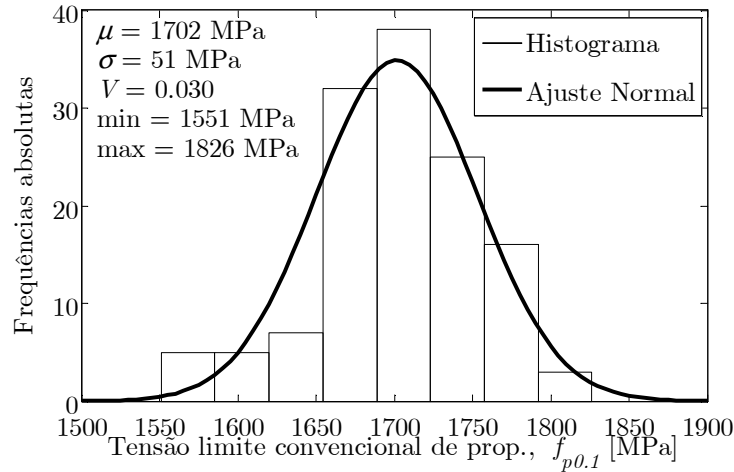


Figura 6.5: Histograma da tensão $f_{p0.1}$ de 131 de ensaios de tracção realizados no LNEC entre 2001 e 2009.

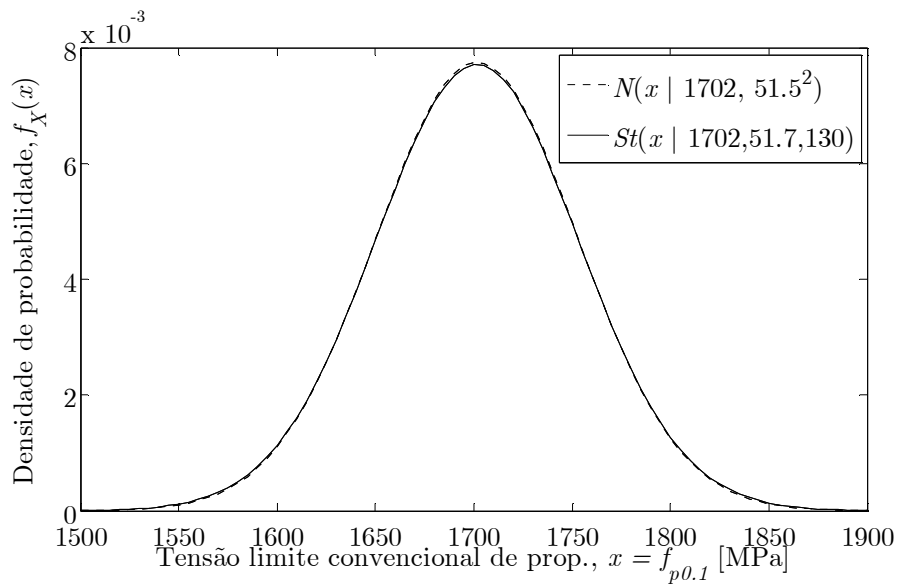


Figura 6.6: Modelo Normal ajustado à amostra LNEC e modelo preditivo *a priori* LNEC.

Compare-se agora o modelo recomendado pelo *Probabilistic Model Code* (PMC) com o modelo preditivo *a priori* LNEC (Figura 6.7). Uma leitura qualitativa dos modelos probabilísticos mostra que são relativamente diferentes. A fim de ter uma apreciação quantitativa da diferença, avalie-se a probabilidade $P(X_2 < X_1)$, em que X_1 segue o modelo recomendado pelo PMC e X_2 segue o modelo preditivo *a priori*

LNEC. Note-se que se os modelos fossem coincidentes, ter-se-ia $P(X_2 < X_1) = 0.5$, pelo que quanto mais afastada de 0.5 estiver essa probabilidade menor é a evidência dos dados em favor da compatibilidade dos modelos. Recorrendo ao método de MC, obteve-se $P(X_2 < X_1) = 0.15$. Este valor está mais próximo de 0 do que de 0.5, havendo por isso razões para suspeitar da credibilidade do modelo recomendado pelo PMC.

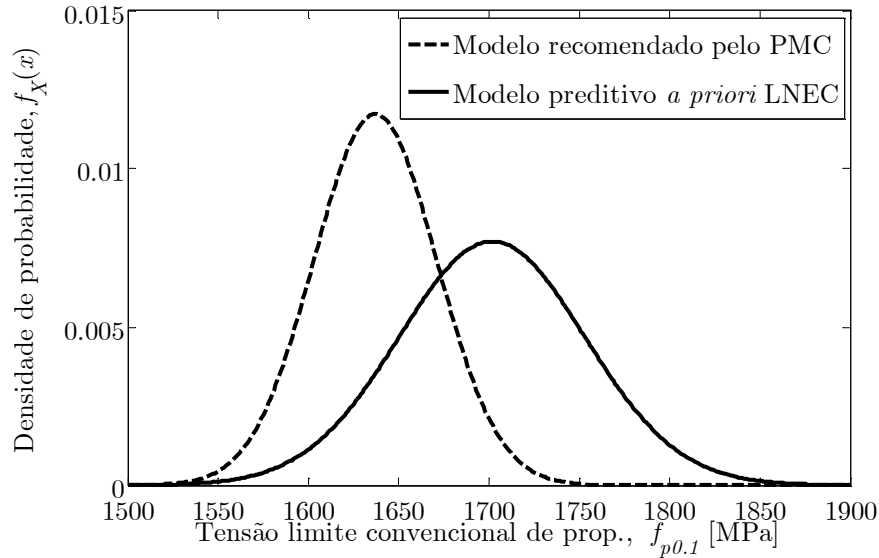


Figura 6.7: Comparação do modelo recomendado pelo PMC com o modelo *a priori* LNEC.

Analise-se agora o problema que se tem vindo a estudar, mas desta vez usando como informação anterior o modelo preditivo *a priori* LNEC, dado por $f_X(x) = St(x | 1702, 51.7, 130)$. A estimativa para o valor característico da tensão limite convencional de proporcionalidade do aço de pré-esforço é agora $\hat{X}_{k0} = 1616$ MPa. Recorde-se que, usando unicamente a amostra disponível (colhida da ponte em avaliação), tinha-se obtido $\hat{X}_k = 1764$ MPa, que é cerca de 9% superior à estimativa LNEC. Combinando agora as duas fontes de informação (LNEC e amostra colhida da ponte em avaliação) obteve-se $\hat{X}_k = 1613$ MPa, que é inferior às estimativas acima, verificando-se mais uma vez um aumento da incerteza ao combinar informação anterior com informação amostral.

É então apropriado que se investigue a compatibilidade dessas fontes de informação. Analisemos em primeiro lugar os gráficos dos três modelos preditivos envolvidos: (1) modelo preditivo *a priori* LNEC; (2) modelo preditivo *a posteriori* usando apenas informação amostral e (3) modelo preditivo *a posteriori* com ambas as informações combinadas. A Figura 6.8 mostra os gráficos desses modelos. Conforme se pode observar, a variância do modelo preditivo com ambas as informações

combinadas é superior à variância dos modelos preditivos separados e daí a descida na estimativa do valor característico. Observa-se também que o modelo preditivo com as informações anterior e amostral combinadas está muito mais próximo do modelo preditivo *a priori* do que do modelo preditivo só com informação amostral, que é o reflexo da dimensão da amostra *a priori* ($n = 131$) ser bastante superior à dimensão da amostra colhida da ponte ($n = 9$). Observa-se ainda que existe uma diferença nítida entre as médias da amostra *a priori* LNEC e da amostra colhida da ponte, o que levanta a questão de se tratarem de amostras pertencentes a populações distintas.

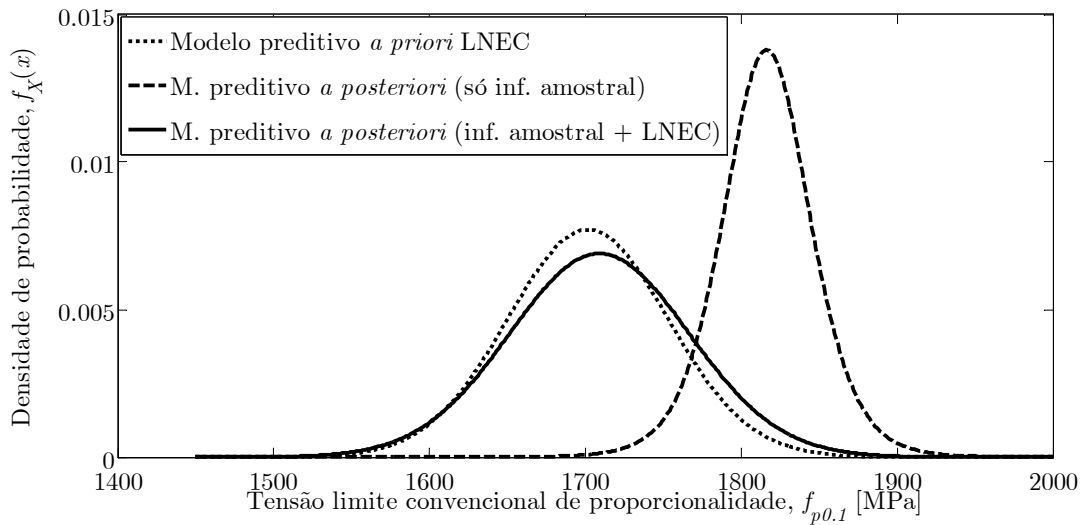


Figura 6.8: Modelos preditivos: *a priori* (amostra LNEC), *a posteriori*, apenas informação amostral) e *a posteriori* (informação amostral + informação *a priori*).

A fim de examinar melhor esta questão (se se tratam ou não de duas populações distintas), comparam-se de seguida as médias das amostras. De um ponto de vista Bayesiano, as médias das amostras são modeladas como variáveis aleatórias, pelo que a diferença entre as médias é também variável aleatória. Analise-se então a variável aleatória $\mu = \mu_2 - \mu_1$, onde μ_1 é a média da amostra LNEC e μ_2 é a média da amostra colhida da ponte em avaliação. As variáveis μ_1 e μ_2 podem ser consideradas obviamente independentes.

Recorrendo ao método de MC e à Eq. (5.4), geraram-se amostras de μ_1 e μ_2 , a partir das quais se obteve uma amostra de $\mu = \mu_2 - \mu_1$. O gráfico da Figura 6.9 mostra a distribuição de probabilidade de μ . O intervalo de credibilidade centrado a 95% é de [92.5, 136.7] MPa, que exclui claramente o valor 0, constituindo assim uma forte evidência de que as amostras em questão pertencem de facto a duas populações distintas. Tratando-se de duas populações distintas, não parece pois apropriado combinar a informação anterior com a informação colhida da estrutura em avaliação.

Numa situação como esta, o procedimento recomendado é usar, entre as duas fontes de informação, a que for mais credível e representativa da população em estudo.

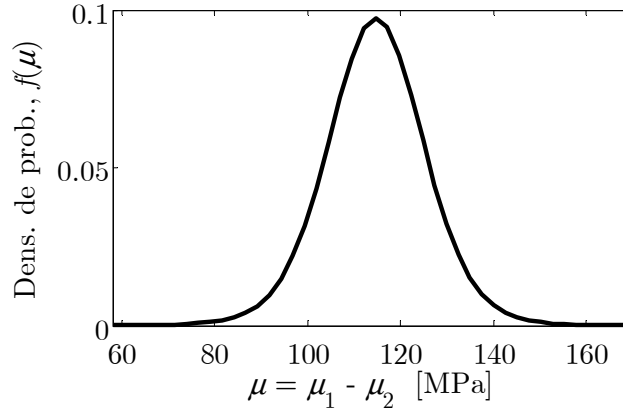


Figura 6.9: Distribuição de probabilidade da diferença entre médias das amostras LNEC e colhida dos registos de obra.

6.3.3 Exemplo 2

Neste exemplo analisa-se uma outra amostra de resistências de aço de pré-esforço extraída de outro viaduto. O viaduto em apreço localiza-se na A10 e a construção data de 2002. Embora o viaduto tenha empregue várias centenas de toneladas de aço, dispõe-se de uma amostra constituída por apenas 4 valores, correspondentes a 4 bobines empregues. A amostra em apreço é a seguinte: $\varepsilon = \{1671, 1676, 1627, 1693\}$, em que os valores se referem a tensões limite convencional de proporcionalidade, $f_{p0.1}$, expressos em MPa. O aço dos cordões pertence à classe Y1860. As seguintes estatísticas resumem a informação contida na amostra acima:

$$n = 4; \quad \bar{x} = 1667 \text{ MPa}; \quad s = 28.1 \text{ MPa}; \quad V = 0.017.$$

Pretende-se estimar o valor característico, $X_k = F_X^{-1}(0.05)$, e o valor de dimensionamento $X_d = F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))$, considerando $\alpha_X = 0.80$ e $\beta = 3.8$. Ora, considerando que o modelo Normal é apropriado na descrição da resistência do aço e que a única informação relevante é a contida na amostra, o modelo preditivo Bayesiano de $X = f_{p0.1}$ é dado por $f_X(x | \varepsilon) = St(x | a, b, \nu)$, com $a = \bar{x}$; $b = s\sqrt{1 + 1/n}$ e $\nu = n - 1$, donde as estimativas pretendidas são iguais a:

$$X_k = a + b \cdot t(0.05, \nu) = 1593 \text{ MPa}, \quad (6.16)$$

$$X_d = a + b \cdot t(\Phi(-\alpha_X \beta), \nu) = 1365 \text{ MPa}, \quad (6.17)$$

onde $t(p, \nu)$ representa a inversa de uma distribuição t-Student com ν graus de liberdade, avaliada na probabilidade p .

Avalie-se em que medida as estimativas acima estão a ser penalizadas pela incerteza estatística. Se a amostra acima fosse de dimensão infinita, as estimativas das quantidades de interesse seriam dadas por:

$$X_{k0} = a - 1.645 \cdot s = 1621 \text{ MPa}; \quad (6.18)$$

$$X_{d0} = a - \alpha_X \beta \cdot s = 1581 \text{ MPa}. \quad (6.19)$$

Verifica-se assim que as estimativas Bayesianas de X_k e X_d , que incluem apropriadamente o efeito da incerteza estatística, encontram-se reduzidas de 1.7% e 13.7% em relação às estimativas (6.18) e (6.19), que desprezam o efeito da incerteza estatística. Pode então concluir-se que a incerteza estatística na estimativa do valor característico é relativamente pequena, mas tem alguma importância na estimativa do valor de dimensionamento.

Uma vez que se dispõe de informação anterior credível e aplicável à situação em apreço, determinam-se de seguida novas estimativas para X_k e X_d , considerando o efeito combinado da informação anterior e amostral. Como informação anterior, vai usar-se a informação colhida dos ensaios de tracção realizados no LNEC referidos anteriormente, cujos resultados se encontram, resumidos na Figura 6.5. De acordo com essa Figura, a média e o desvio padrão de $X = f_{p0.1}$ têm os seguintes valores: $\mu_{X0} = 1702 \text{ MPa}$ e $\sigma_{X0} = 51 \text{ MPa}$. Uma vez que se trata de uma informação credível e aplicável à estrutura em estudo, vai atribuir-se a esta informação um peso $n_0 = 50$, que representa uma importante redução na incerteza estatística. Os restantes hiperparâmetros têm assim os seguintes valores: $\mu_0 = 1702 \text{ MPa}$; $\alpha_0 = (n_0 - 1) / 2 = 24.5$; $\beta_0 = [(n_0 - 1) / 2] \times \sigma_{X0}^2 = 63\,724.5 \text{ MPa}^2$. Combinado a informação expressa nestes hiperparâmetros com a informação contida na amostra acima, obtêm-se os seguintes hiperparâmetros *a posteriori* (Eq. (5.10) e (5.11)): $\mu_n = 1699 \text{ MPa}$; $n_n = 54$; $\alpha_n = 26.5$ e $\beta_n = 67\,212 \text{ MPa}^2$. A partir destes hiperparâmetros e recorrendo à Eq. 5.13, obtêm-se as seguintes estimativas das quantidades de interesse: $X_k = 1614 \text{ MPa}$; $X_d = 1537 \text{ MPa}$. A Tabela seguinte compara estas estimativas com as que se tinha obtido anteriormente usando apenas a informação contida na amostra:

Tabela 6.3: Comparação das estimativas para X_k e X_d usando apenas informação amostral e usando informação amostral + anterior.

Quantidade de interesse			Informação a usar		Dif
			Só amostral	Amostral + anterior	
Valor característico	X_k	[MPa]	1593	1614	1.3%
Valor de dimensionamento	X_d	[MPa]	1365	1537	12.6%

Conforme se observa, relativamente ao valor característico X_k não há ganho significativo em juntar informação anterior, o que não constitui surpresa, atendendo a que a incerteza estatística nesta quantidade é relativamente pequena, como se viu acima. No entanto, no que se refere ao valor de dimensionamento, o ganho já tem algum significado (+12.6%), o que mostra o benefício do uso de informação anterior.

A fim de apreciar o grau de compatibilidade entre as duas fontes de informação e consequentemente legitimar a sua combinação, mostra-se na Figura 6.10 os modelos probabilísticos envolvidos na análise: modelo *a priori* e os dois modelos *a posteriori*, um incluindo apenas informação amostral e outro incluindo ambas as informações combinadas, anterior e amostral. Conforme se observa nesses gráficos, o aumento de variância que se verificou no exemplo anterior (quando se combinou as duas fontes de informação), não se verifica no presente caso. Pode assim concluir-se as duas fontes de informação usadas no presente exemplo são compatíveis, havendo por isso legitimidade para combiná-las.

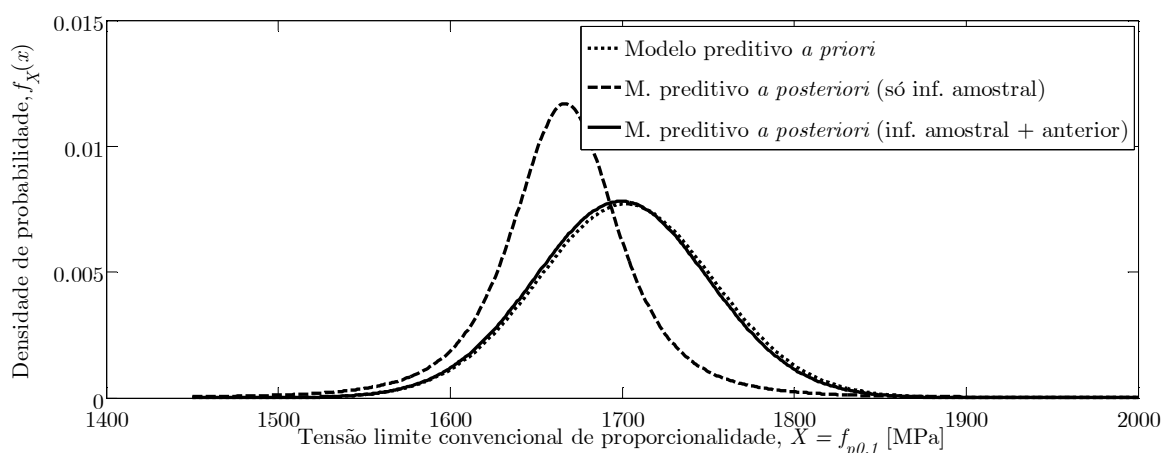


Figura 6.10: Modelos preditivos relativos à tensão limite convencional de proporcionalidade do exemplo 2.

6.4 Considerações finais

Neste capítulo demonstrou-se como combinar a informação contida numa amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ colhida de uma ponte em avaliação com a informação contida numa recomendação bibliográfica da forma $f_X(x) = N(x | \mu_{X0}, \sigma_{X0}^2)$. Conforme se viu, é possível determinar hiperparâmetros consistentes com essa recomendação, bastando para o efeito atribuir (subjectivamente) um peso, ou credibilidade, a essa informação na forma da dimensão de uma *amostra equivalente a priori*.

No Capítulo anterior, enfatizou-se a importância de, perante a avaliação da segurança de uma ponte existente, avaliar o impacto da incerteza estatística na

quantidade que estiver a ser estimada, impacto esse que é o reflexo das amostras colhidas da ponte serem em geral de dimensão limitada. Sugeriu-se que, em princípio, só se justifica tentar complementar essa informação com eventual informação anterior nos casos em que essa incerteza é significativa. No presente Capítulo viu-se que se existir informação anterior que possa ser combinada com a informação colhida directamente da ponte em avaliação, é importante comparar a variância do modelo preditivo que se obtém combinando as duas fontes de informação, com a variância dos modelos preditivos que se obtém mantendo as fontes de informação separadas. Se dessa combinação resultar um aumento de variância, ou, por outras palavras, se a incerteza aumentar, deve-se analisar o grau de compatibilidade das duas fontes de informação, o que poderá ser feito recorrendo a uma análise estatística de comparação de médias. Se se concluir pela falta de compatibilidade (dados pertencentes a populações distintas), as duas fontes de informação não devem ser combinadas, caso em que se recomenda usar apenas uma delas — aquela que for julgada mais credível.

O fluxograma que se apresenta na Figura 6.11 constitui uma síntese destas considerações. A metodologia que se propõe neste fluxograma inicia-se com a estimativa da quantidade de interesse (valor característico, valor de dimensionamento, índice de fiabilidade, etc.) usando apenas a informação contida na amostra colhida da ponte em avaliação, prosseguindo depois como esquematizado.

Comparou-se o modelo proposto pelo PMC para a resistência do aço de pré-esforço com dados existentes no LNEC, tendo-se concluído que a proposta dessa referência bibliográfica não deve ser considerada representativa da realidade em Portugal no período em questão. Isto mostra que é preciso ser-se cauteloso ao recorrer a informação constante em bibliografia.

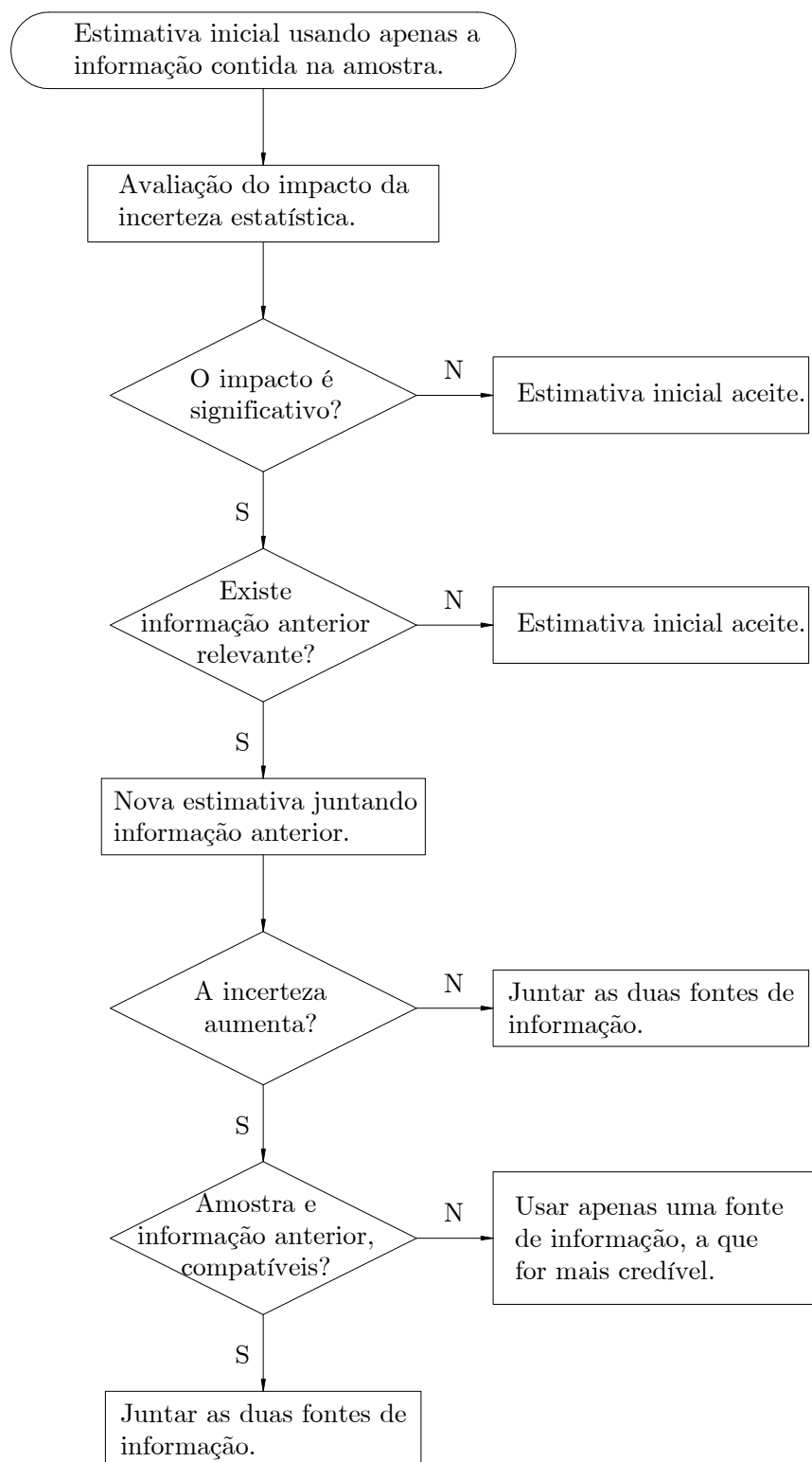


Figura 6.11: Proposta para uso de metodologia Bayesiana em avaliações de segurança de pontes existentes.

Capítulo 7

Predição da resistência do betão em estruturas existentes

7.1 Considerações iniciais

O presente capítulo faz uma aplicação particular da abordagem Bayesiana. Especificamente, trata da obtenção do modelo preditivo da resistência do betão numa estrutura existente recorrendo a um ensaio indirecto devidamente calibrado. O estudo exemplifica o uso do esclerómetro, embora muitos aspectos analisados sejam independentes do tipo de ensaio indirecto usado. Por modelo preditivo da resistência, entende-se a distribuição de probabilidade que se obtém levando em conta as diferentes fontes de incerteza do problema, e não somente a incerteza originada pela variabilidade inerente à resistência do betão. Essas fontes incluem: (1) incerteza na calibração e (2) incerteza originada na falta de precisão do ensaio. O conhecimento dessa distribuição será útil para efeitos de avaliação probabilística da segurança da estrutura, onde a resistência do betão é uma das variáveis básicas do problema.

Actualmente, o método mais preciso para a caracterização da resistência do betão de uma estrutura existente consiste no recurso à técnica da carotagem (Figura 7.1). Trata-se, no entanto, de uma técnica semi-destrutiva, além de cara e morosa, o que limita o número de carotes que em geral é possível extrair da estrutura em avaliação. Quando o número de carotes disponíveis é pequeno, a incerteza estatística daí resultante pode penalizar significativamente a estimativa da resistência do betão. Esta dificuldade pode ser ultrapassada recorrendo a algum tipo de ensaio indirecto como complemento aos ensaios directos sobre carotes, tais como o esclerómetro (Figura 7.2), ultra-sons, ou outro tipo de NDT. A ideia é extrair da estrutura um certo número de carotes, segundo o que for razoável e praticável, usar os resultados

das carotes para calibrar o ensaio indirecto e depois proceder a um levantamento exaustivo da estrutura com esse ensaio indirecto. Os ensaios indirectos são bastante mais económicos que o ensaio de carotes e a generalidade não introduz qualquer dano na estrutura, permitindo com relativa facilidade a obtenção de várias dezenas de leituras, ou mesmo centenas, reduzindo assim a incerteza estatística associada à amostra de resultados em si. Como se demonstrará neste capítulo, essa redução pode compensar as incertezas introduzidas pelo ensaio indirecto (incerteza na calibração e incerteza devido à falta de precisão do ensaio), caso em que o uso do ensaio indirecto para efeitos de caracterização da resistência do betão é vantajoso.



Figura 7.1: Extracção de carotes.

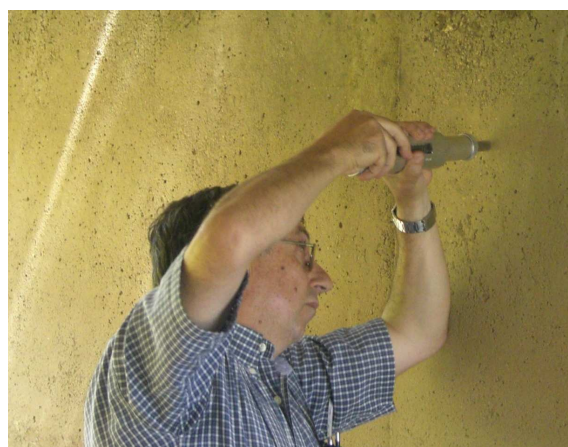


Figura 7.2: Utilização do esclerómetro.

Deve referir-se, porém, que os ensaios indirectos são muitas vezes usados antes da extracção de carotes, com o objectivo de determinar os locais onde o betão se apresenta com resistências extremas. Este conhecimento será de ajuda na selecção dos locais de extracção de carotes com a finalidade de se obter uma amostra representativa da estrutura em avaliação. Sob este ponto de vista, o uso de um ensaio indirecto é sempre vantajoso. No entanto, depois de se extrair as carotes e calibrar o ensaio indirecto, é necessário decidir se a resistência do betão deve ser avaliada usando apenas os resultados das carotes ou se deve ser avaliada usando os resultados do ensaio indirecto como complemento. O estudo que se apresenta neste Capítulo ajudará a tomar essa decisão.

7.2 A necessidade de calibração prévia dos ensaios indirectos

De acordo com a Norma NP EN 13791 (2008), a calibração de um ensaio indirecto deve ser realizada especificamente para a estrutura em avaliação. De facto, os resultados dos ensaios indirectos dependem não só do equipamento em si, mas também das características do betão em avaliação, tal como o seu estado

higrométrico, o tipo de agregados, a eventual existência de carbonatação, entre outros. Por esse motivo, a expressão «calibrar o ensaio» é mais correcta que a expressão «calibrar o equipamento». Se se recorrer a um ensaio indirecto sem uma calibração prévia e específica para a estrutura em avaliação, o risco de se introduzirem erros de natureza sistemática nas medições efectuadas é elevado.

No caso específico do esclerómetro, cujo princípio de funcionamento tira partido da correlação existente entre a dureza superficial do betão e a sua resistência, o documento IAEA (2002) refere que não se deve depositar muita confiança nas curvas de calibração fornecidas pelos fabricantes, uma vez que estes estabelecem essas curvas recorrendo a cubos de betão padrão, cuja composição pode diferir bastante da composição do betão da estrutura em avaliação. Esse mesmo documento refere que se têm observado diferenças significativas entre as curvas de calibração fornecidas pelos fabricantes e as obtidas em estruturas existentes. Para ilustrar a necessidade de calibrar o esclerómetro especificamente para a estrutura em avaliação, alistam-se de seguida os principais factores que afectam o índice esclerométrico (IAEA, 2002):

- 1) Tipos de agregado. Obtêm-se curvas de calibração bastante diferentes para betões com idêntica resistência mas com diferentes tipos de agregado. Mesmo para diferentes tipos de agregado, têm-se observado diferenças consoante a origem do agregado.
- 2) Estado da superfície quanto a rugosidade, porosidade e presença de betão delaminado.
- 3) Dimensões e forma do elemento em estudo, incluindo a solidez da sua fixação. Qualquer movimento causado pelo impacto do esclerómetro resulta numa diminuição no valor lido.
- 4) Idade do betão. Betões com idêntica resistência mas idades diferentes conduzem a índices esclerométricos diferentes.
- 5) Humidade do betão.
- 6) Tipo de cimento.
- 7) Carbonatação da camada superficial do betão. O índice esclerométrico de um betão carbonatado pode ser até cerca de 50% superior ao dum betão não carbonatado.

Em face de todos estes factores, compreende-se a necessidade de calibrar o esclerómetro em cada caso concreto. O índice esclerométrico é também afectado pela falta de perpendicularidade do equipamento em relação à superfície, bem como se o impacto atinge directamente ou não um inerte que esteja à superfície. Contudo, a

incerteza originada por estes factores é parcialmente eliminada por se efectuarem medições repetidas na mesma área de ensaio. Neste respeito, a Norma EN 12504-2 (2001), que delineia os procedimentos a adoptar nas medições do índice esclerométrico, recomenda um mínimo de 9 leituras em cada área de ensaio, sugerindo que se registre a mediana dessas 9 leituras. A vantagem do uso da mediana em vez do uso da média aritmética é permitir a eliminação automática de eventuais *outliers*.

7.3 Calibração de ensaios indirectos

Vai assumir-se que o modelo que relaciona a resistência do betão (variável Y) com a grandeza X medida pelo ensaio indirecto (índice esclerométrico, no caso do esclerómetro) satisfaz os requisitos da regressão linear. Em geral a correlação entre a resistência do betão e o índice esclerométrico satisfaz esses requisitos (Monteiro & Gonçalves, 2008). O ensaio de arranque (*pull out test*) é outro exemplo (NP EN 13791, 2008). Assim, a relação entre Y e X é dada por um modelo da forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + E. \quad (7.1)$$

onde a variável E , designada erro ou resíduo, tem distribuição Normal com média nula e desvio padrão σ , isto é, $E \sim N(0, \sigma)$. Note-se que E pode escrever-se da seguinte forma: $E = \sigma Z$, com $Z \sim N(0, 1)$. Esta variável destina-se a incluir todos os factores que afectam a resistência do betão não contabilizados pela variável X . O resíduo E corrige ainda o facto de o modelo poder não ser perfeitamente linear. Os parâmetros de regressão (ou parâmetros de calibração) são por isso três: β_0 , β_1 e σ , e são estimados em geral pelo método dos mínimos quadrados. Note-se que o parâmetro σ constitui uma medida da precisão do ensaio indirecto, ou uma medida da sua capacidade em explicar a resistência do betão. Trata-se assim de um parâmetro importante na caracterização da fiabilidade do ensaio.

No modelo de regressão linear assume-se que o desvio padrão σ não depende de X , isto é, permanece constante para diferentes valores de X . Este requisito é conhecido por requisito da homocedasticidade (Murteira *et al.*, 2008). Para um valor particular de X , digamos $X = x$, o modelo de regressão acima expressa-se usualmente na seguinte forma:

$$Y | x = \beta_0 + \beta_1 x + \sigma Z. \quad (7.2)$$

Assim, de acordo com estas hipóteses, pode escrever-se:

$$E(Y | x) = \beta_0 + \beta_1 x. \quad (7.3)$$

$$Var(Y | x) = \sigma^2. \quad (7.4)$$

$$f_{Y|X}(y | x) = N(y | \beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2). \quad (7.5)$$

Na Figura 7.3 representa-se graficamente o modelo de regressão linear acabado de descrever.

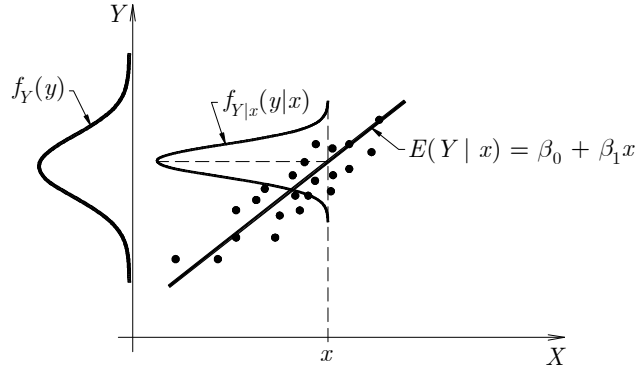


Figura 7.3: Representação gráfica do modelo de regressão linear simples.

A calibração do ensaio indirecto consiste em estimar os parâmetros β_0 , β_1 e σ a partir de uma amostra de n pares $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, onde x_i e y_i representam, respectivamente, o valor do ensaio indirecto medido no local i e a resistência da carote extraída do mesmo local.

Recordam-se de seguida as estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros de calibração, as quais garantem que a média dos resíduos é nula:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad (7.6)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \quad (7.7)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}. \quad (7.8)$$

Antes de aplicar o modelo de regressão linear é importante verificar o cumprimento dos pressupostos deste modelo, que se resumem de seguida (Pedrosa & Gama, 2004):

- 1) Os resíduos apresentam média nula. Este requisito é automaticamente satisfeito se os parâmetros de calibração forem estimados pelo método dos mínimos quadrados.

- 2) A variância dos resíduos é constante (requisito da homocedasticidade). O gráfico de dispersão de pontos (x_i, y_i) ajuda a apreciar qualitativamente a satisfação deste requisito. De facto, se este requisito for satisfeito, a banda dos valores y_i em torno da recta de regressão possui largura constante.
- 3) Os resíduos sucessivos são independentes entre si. Para avaliar a satisfação deste requisito pode recorrer-se a testes de independência. A independência pode também ser apreciada qualitativamente, observando o gráfico de pontos (i, e_i) , onde $i = 1, \dots, n$ representa a sequência temporal de medições e $e_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$. Quando os resíduos e_i são independentes entre si, os pontos (i, e_i) situam-se aleatoriamente acima e abaixo do eixo das abcissas (eixo do tempo).
- 4) Os resíduos devem seguir uma lei Normal. O requisito da normalidade pode ser apreciado qualitativamente observando a distribuição empírica dos erros $e_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$ impressos em papel Normal. Pode-se também efectuar uma apreciação quantitativa recorrendo a um teste de ajustamento, tal como o teste χ^2 ou o teste Kolmogorov-Smirnov (Benjamim & Cornell, 1970).

Todos os resultados de calibração do ensaio indirecto devem ser entendidos como estando condicionados à satisfação dos requisitos acima. Isto significa que qualquer incerteza que resulte do não cumprimento perfeito dos requisitos acima não está contabilizada no modelo de regressão. Por este motivo, as inferências probabilísticas feitas com base na curva de calibração devem ser consideradas como estimativas. De qualquer forma, se as incertezas que daí resultem poderem ser consideradas pequenas quando comparadas com a incerteza originada pela variabilidade inerente da resistência do betão, essas estimativas poderão ser consideradas como boas estimativas.

Há contudo uma incerteza que pode e deve ser tida em conta, que é a incerteza estatística, originada no facto de se usar um número limitado de carotes no acto da calibração. Esta incerteza pode ser quantificada quer por uma abordagem clássica (ou frequentista) quer por uma abordagem Bayesiana, como se discute na próxima secção.

7.4 Obtenção do modelo preditivo da resistência do betão usando um ensaio indirecto

Os pressupostos do modelo de regressão linear implicam que a distribuição da resistência Y do betão para um dado valor x do ensaio indirecto é dada por: $f_{Y|X}(y | x) = N(y | \beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$. Ao se substituir os parâmetros β_0 , β_1 e σ pelas suas

estimativas, respectivamente, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}$, introduz-se a chamada incerteza estatística, cuja influência é tida em conta no chamado modelo preditivo Bayesiano de Y , dado por (Bernardo, 2009):

$$f_{Y|X}(y | x) = St \left(y \mid \underbrace{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x}_a, \underbrace{\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}}}_b, \underbrace{n - 2}_\nu \right), \quad (7.9)$$

onde n designa a dimensão da amostra de pares $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ usada na calibração do ensaio; \bar{x} e S_{xx} são definidos pelas expressões:

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i; \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (7.10)$$

O modelo preditivo (7.9) foi obtido partindo da distribuição *a priori* $f(\beta_0, \beta_1, \sigma) = 1/\sigma$, conhecida como distribuição de Jeffreys. Deve referir-se, porém, que o modelo preditivo acima coincide com o modelo preditivo clássico (Pedrosa & Gama, 2004). Recorde-se que a diferença fundamental entre as abordagens clássica e Bayesiana reside no modo em como são tratados os parâmetros do modelo, β_0 , β_1 e σ . Por não serem conhecidos com precisão, a abordagem Bayesiana trata-os como variáveis aleatórias, atribuindo-lhes, *a priori*, uma determinada distribuição conjunta $f(\beta_0, \beta_1, \sigma)$ que vai depois ser actualizada (via Teorema de Bayes) à luz da amostra $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

A abordagem Bayesiana, além de conduzir a interpretações probabilísticas mais claras, é mais abrangente que a abordagem clássica, na medida em que permite juntar à amostra $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ informação anterior que eventualmente haja a respeito dos parâmetros β_0 , β_1 e σ , informação essa que é então materializada numa distribuição *a priori* $f(\beta_0, \beta_1, \sigma)$ do tipo informativo. No entanto, como se disse anteriormente, é aconselhável calibrar o ensaio indirecto recorrendo a carotes extraídas da estrutura em avaliação, ignorando curvas de calibração anteriores. Assim, no estudo que segue, não se tirará partido desta capacidade da abordagem Bayesiana.

É interessante notar que, quando $n \rightarrow \infty$, verifica-se que:

- 1) a distribuição t-Student tende para a distribuição Normal;
- 2) $\hat{\sigma} \rightarrow \sigma$;
- 3) $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \rightarrow 1$;
- 4) $\hat{\beta}_0 \rightarrow \beta_0$;
- 5) $\hat{\beta}_1 \rightarrow \beta_1$.

Quer dizer, quando $n \rightarrow \infty$, o modelo preditivo expresso por (7.9) converge para o modelo $f_{Y|X}(y|x) = N(y|\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$ que corresponde à não existência de incerteza estatística nos parâmetros β_0 , β_1 e σ .

Observe-se novamente a Eq. (7.9). Uma forma alternativa de apresentar este resultado é escrever:

$$Y|x = a + bT_{n-2} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} T_{n-2}, \quad (7.11)$$

com $T_{n-2} \sim St(0, 1, n-2)$.

Suponha-se agora que se deseja obter o modelo preditivo $f_Y(y)$ da resistência do betão da estrutura (ou do elemento estrutural) como um todo, isto é, independentemente do índice esclerométrico X . Para tal é necessário conhecer a distribuição de X , $f_X(x)$. Esta distribuição descreve a variabilidade de X ao longo da estrutura, ou ao longo do elemento estrutural em avaliação. Para obter a distribuição preditiva Bayesiana de Y procede-se como explicado no Capítulo 4, conduzindo ao seguinte integral:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx. \quad (7.12)$$

Para avaliar este integral pode recorrer-se ao método de MC, cuja essência consiste em obter uma amostra de Y (resistência do betão) partindo de uma amostra de X (valores medidos pelo ensaio indirecto), como se delineia de seguida:

- 1) Uma vez calibrado o ensaio indirecto (determinação duma estimativa para os parâmetros β_0 , β_1 e σ), procede-se ao levantamento exaustivo da estrutura ou do elemento estrutural em avaliação, determinando-se m valores do ensaio indirecto, a saber, $\{x_1, \dots, x_m\}$.
- 2) Em seguida gera-se uma amostra $\{t_1, \dots, t_m\}$ da distribuição t-Student com $\nu = n - 2$ graus de liberdade, em que n designa o número de carotes usadas na calibração do ensaio indirecto.
- 3) Munidos destas duas amostras, obtém-se uma amostra $\{y_1, \dots, y_m\}$ da variável Y por meio da expressão:

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}} t_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (7.13)$$

onde \bar{x} e S_{xx} são dados por (7.10).

A partir da amostra $\{y_1, \dots, y_m\}$ podem realizar-se todas as inferências pretendidas. Em particular, a média e o desvio padrão de Y podem ser estimadas recorrendo às estatísticas habituais: $\bar{y} = (1/m) \sum_{i=1}^m y_i$ e $s_Y = \{[1/(m-1)] \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2\}^{0.5}$.

Deve-se, no entanto, ter presente que a amostra $\{y_1, \dots, y_m\}$ é finita, pelo que qualquer inferência que dela seja extraída também contém incerteza estatística. Para contabilizar esta incerteza, pode recorrer-se novamente à abordagem Bayesiana. Assim, de acordo com os resultados apresentados no Capítulo 5 e assumindo que, por um lado, a resistência do betão segue uma lei Normal e que, por outro, não existe informação anterior relevante, a amostra $\{y_1, \dots, y_m\}$ conduz ao seguinte modelo preditivo, a partir do qual se podem fazer todos os cálculos probabilísticos necessários:

$$f_Y(y) = St \left(y \mid \bar{y}, s_Y \sqrt{1 + \frac{1}{m}}, m-1 \right), \quad (7.14)$$

7.5 Exemplo

Para ilustrar a metodologia desenvolvida na secção anterior, apresenta-se um exemplo com dados reais extraídos de Monteiro e Gonçalves (2008). O exemplo trata da caracterização da resistência do betão numa estrutura que estava em construção na altura da recolha dos dados e cuja segurança foi questionada por suspeitas de má qualidade do betão. Para esse efeito foi efectuado um levantamento exaustivo dos pilares da estrutura com um esclerómetro, assim como a extracção de um certo número de carotes, cuja resistência medida em laboratório serviu para calibrar o esclerómetro. A Tabela 7.1 mostra os pares (x_i, y_i) usados na calibração do esclerómetro (21 pares).

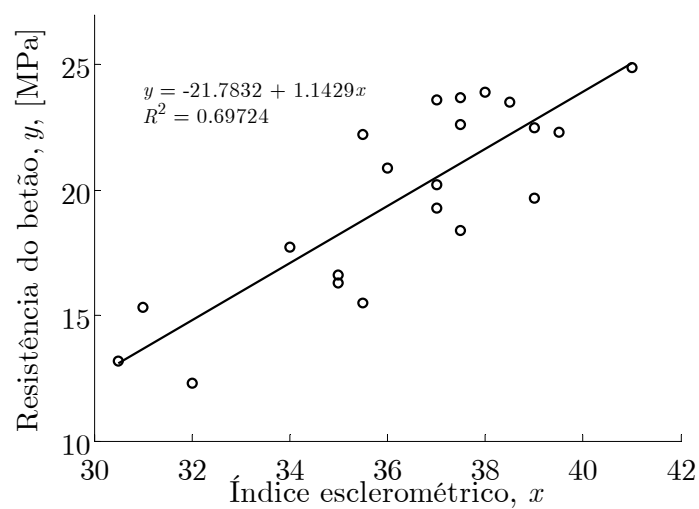
Os valores do índice esclerométrico que constam na Tabela foram obtidos através da mediana de 10 leituras repetidas em cada local de ensaio e as resistências das carotes foram devidamente corrigidas para ter em conta as diferentes dimensões das mesmas (Monteiro & Gonçalves, 2008). Com base nos dados da Tabela 7.1, procedeu-se à calibração do esclerómetro, tendo-se obtido os seguintes parâmetros de regressão:

$$\hat{\beta}_0 = -21.78 \text{ MPa}; \hat{\beta}_1 = 1.14 \text{ MPa}; \hat{\sigma} = 2.12 \text{ MPa}; R^2 = 0.697.$$

A Figura 7.4 mostra o gráfico de dispersão de pontos (x_i, y_i) bem como a recta de regressão. Naturalmente deve-se questionar se os dados são compatíveis com os pressupostos do modelo de regressão linear. Monteiro & Gonçalves (2008) mostraram que sim.

Tabela 7.1: Pares (x_i, y_i) para a calibração do esclerómetro.

Local i	Índice esclerométrico x_i	Resistência da carote [MPa] y_i
1	41.0	24.9
2	37.0	19.3
3	38.0	23.9
4	37.0	20.2
5	39.0	22.5
6	37.5	22.6
7	32.0	12.3
8	37.0	23.6
9	30.5	13.2
10	31.0	15.3
11	35.0	16.6
12	35.5	22.2
13	34.0	17.7
14	35.5	15.5
15	37.5	23.7
16	37.5	18.4
17	35.0	16.3
18	36.0	20.9
19	38.5	23.5
20	39.5	22.3
21	39.0	19.7
min	30.5	12.3
max	41.0	24.9
média	36.3	19.7
desv. padr.	2.74	3.76

**Figura 7.4:** Representação gráfica do modelo de regressão linear.

A Tabela 7.2 contém a amostra $\{x_1, \dots, x_m\}$ de índices esclerométricos que resultou do levantamento exaustivo dos pilares da estrutura em apreço ($m = 84$ leituras).

Tabela 7.2: Índice esclerométrico x_i , $i = 1, \dots, 84$.

30.5	35.5	37.0	38.0	40.5	42.5
30.5	35.5	37.0	38.0	40.5	42.5
31.0	35.5	37.0	38.0	40.5	43.0
32.0	35.5	37.0	38.5	41.0	43.0
32.0	35.5	37.0	38.5	41.0	43.0
32.0	36.0	37.0	39.0	41.0	43.0
34.0	36.0	37.0	39.0	41.0	43.0
34.0	36.0	37.5	39.5	41.0	43.0
34.0	36.0	37.5	39.5	41.0	43.0
34.0	36.0	37.5	39.5	41.0	43.5
34.5	36.0	37.5	40.0	41.5	44.0
35.0	36.0	37.5	40.0	41.5	45.0
35.0	36.0	37.5	40.0	41.5	45.0
35.0	36.5	38.0	40.0	42.0	45.5
min = 30.5; máx = 45.5; média = 38.3; desv.pad = 3.53					

De acordo com a metodologia desenvolvida na secção anterior, para gerar uma amostra preditiva da resistência do betão, é necessário gerar uma amostra $\{t_1, \dots, t_m\} \sim St(0, 1, n - 2)$, onde $n = 21$ (número de carotes usadas na calibração). Munidos desta amostra e da amostra $\{x_1, \dots, x_m\}$ de índices esclerométricos, gera-se uma amostra $\{y_1, \dots, y_m\}$ da resistência do betão recorrendo directamente à Eq. (7.13). O procedimento acabado de descrever foi implementado numa rotina MATLAB. A Figura 7.5 mostra o histograma de uma amostra obtida numa das corridas da rotina e ainda a sua distribuição empírica impressa em papel Normal. Dado que cada vez que a rotina é executada obtém-se uma amostra diferente, a amostra escolhida para efeitos de tratamento estatístico foi a que conduziu a uma média e um desvio padrão sensivelmente iguais à média das médias e à média dos desvios-padrão de amostras geradas em corridas sucessivas da rotina. A média e desvio-padrão da amostra seleccionada são iguais a, respectivamente, 22.0 MPa e 4.76 MPa. Os gráficos da Figura 7.5 mostram que a hipótese de normalidade para a resistência do betão é perfeitamente razoável. Assim, considerando que não existe informação anterior relevante relativamente à média e desvio-padrão da resistência do betão, o modelo preditivo da resistência do betão é dado pela Eq. (7.14):

$$f_Y(y) = St\left(y \mid 22.0, 4.76\sqrt{1 + \frac{1}{84}}, 84 - 1\right) = St(y \mid 22.0, 4.79, 83). \quad (7.15)$$

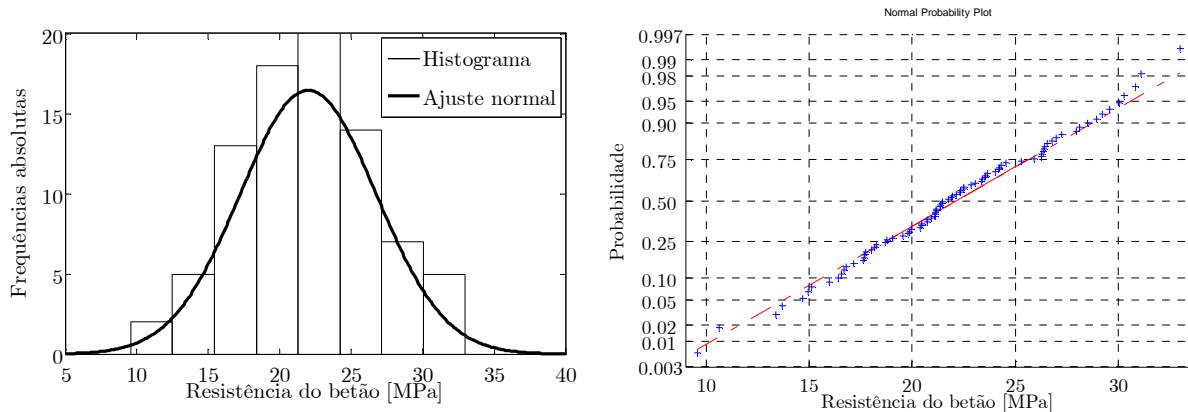


Figura 7.5: Histograma e distribuição empírica da resistência do betão.

Enfatiza-se que este modelo, admitindo como desprezáveis eventuais incertezas originadas no não cumprimento perfeito dos pressupostos do modelo de regressão linear e ainda na hipótese de normalidade da resistência do betão, contempla as seguintes fontes de incerteza:

- 1) Incerteza originada pela variabilidade inerente da resistência do betão.
- 2) Incerteza associada às limitações do esclerómetro em explicar a resistência do betão (traduzidas no parâmetro σ), ou, se se preferir, incerteza originada pela falta de precisão do esclerómetro.
- 3) Incerteza originada no facto do ensaio esclerométrico ter sido calibrado recorrendo a uma amostra finita de carotes (incerteza do tipo estatístico).
- 4) Incerteza originada no facto de se recorrer a uma amostra finita de índices esclerométricos (incerteza do tipo estatístico).

Munidos da distribuição preditiva dada por (7.15), podem realizar-se sem dificuldade todas as inferências pretendidas. Por exemplo, o valor característico (preditivo) da resistência do betão é dado por $f_{ck} = 22.0 + 4.79t(0.05, 83) = 22.0 - 4.79 \times 1.663 = 14 \text{ MPa}$. O intervalo $[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = [12.5, 31.5] \text{ MPa}$ é um intervalo de credibilidade centrado que contém 95% da população. Suponha-se agora que se está interessado em avaliar a probabilidade da estrutura sofrer danos graves se for aplicado a um pilar qualquer (escolhido ao acaso) uma tensão de, por exemplo, 5 MPa. No fundo pretende-se determinar $p_f = P(Y \leq 5)$. Tem-se $p_f = F_{T_{83}}((5 - 22) / 4.79) = 3.2 \times 10^{-4}$, a que corresponde um índice de fiabilidade de $\beta = -\Phi^{-1}(p_f) = 3.41$.

Tem interesse efectuar estas mesmas estimativas, mas usando directamente a amostra de 21 carotes. A média desta amostra é de 19.74 MPa e o desvio padrão é

de 3.76 MPa ($V = 3.76 / 19.74 = 0.19$). Assim, o modelo preditivo Bayesiano usando directamente a amostra de carotes disponíveis é dado por:

$$f_Y(y) = St(y \mid 19.74, 3.76\sqrt{1 + 1/21}, 20) = St(y \mid 19.74, 3.84, 20). \quad (7.16)$$

Na Tabela 7.3 comparam-se as inferências obtidas usando este modelo com as inferências obtidas acima.

Tabela 7.3: Comparação das inferências realizadas via esclerómetro calibrado com as inferências realizadas via carotes

	Resultados via esclerómetro	Resultados via carotes
f_{ck}	14.0	13.1
$P(Y < 5)$	0.00032	0.00052
β	3.41	3.28

Verifica-se assim que o uso do esclerómetro traduziu-se num ganho quer em termos de valor característico da resistência do betão quer em termos de estimativa da fiabilidade da estrutura.

Numa situação genérica, e tendo em conta que a incerteza na avaliação da resistência do betão usando unicamente carotes se reduz com o número destas, mas a incerteza originada pela falta de precisão do ensaio indirecto não se reduz, é de esperar que haja um número de carotes acima do qual a primeira situação (apenas carotes) gere menos incerteza que a segunda situação (carotes + ensaio indirecto). A próxima secção trata da determinação desse número.

7.6 Determinação do número de carotes que torna um ensaio indirecto pouco atractivo

A determinação do número de carotes acima do qual determinado ensaio indirecto deixa de ser atractivo (quando usado com o objectivo de caracterizar a resistência do betão de uma estrutura existente) passa pela quantificação das diferentes incertezas envolvidas. As incertezas que interessa quantificar são as seguintes: quando se avalia a resistência usando apenas carotes, interessa quantificar a incerteza originada no número limitado de carotes e quando se avalia a resistência usando carotes mais ensaio indirecto, interessa quantificar a incerteza na calibração (originada também no número limitado de carotes) e a incerteza originada na falta de precisão do ensaio indirecto.

7.6.1 Incerteza na avaliação da resistência usando unicamente carotes

Suponha-se que a resistência f_c do betão de uma estrutura existente (ou de um dos seus elementos estruturais) segue uma lei Normal. A população f_c refere-se aos diferentes valores que a resistência assume de local para local. O objectivo é estimar o valor característico de f_c (quantilho de 5%), valor que representaremos por f_{ck} . Com o objectivo de estimar f_{ck} , estimativa aqui representada por \hat{f}_{ck} , admita-se que foram extraídas da estrutura n carotes, as quais, depois de ensaiadas em laboratório, conduziram a uma amostra $\{f_{c1}, \dots, f_{cn}\}$ de n resistências à compressão do betão. Sejam \bar{f}_c e s , respectivamente, a média e o desvio padrão dessa amostra. O coeficiente de variação é dado por $V = s / \bar{f}_c$. Assim, dado que se assumiu que a resistência f_c é normalmente distribuída, uma estimativa de f_{ck} seria dada simplesmente por:

$$\hat{f}_{ck0} = (1 - 1.645V)\bar{f}_c. \quad (7.17)$$

Esta estimativa, porém, não inclui a incerteza estatística, isto é, a incerteza associada aos erros nas estimativas da média e coeficiente de variação da população. Esta é incluída na estimativa Bayesiana, dada por:

$$\hat{f}_{ck1} = \left(1 + t(0.05, n-1) \sqrt{1 + \frac{1}{n} V} \right) \bar{f}_c, \quad (7.18)$$

onde $t(p, \nu)$ representa a inversa de uma distribuição t-Student com ν graus de liberdade, avaliada em p . Observe-se que quando $n \rightarrow \infty$, $\hat{f}_{ck1} \rightarrow \hat{f}_{ck0}$.

Dividindo (7.17) por (7.18) obtém-se um factor que reflecte em que medida a estimativa \hat{f}_{ck0} deve ser reduzida a fim de se ter em conta a incerteza estatística. Este factor, que representaremos por α_1 e que designaremos por *factor de incerteza do ensaio directo*, é sempre superior a 1, tendendo para 1 à medida que aumenta a dimensão da amostra de carotes. O factor α_1 é então dado por:

$$\alpha_1 = \frac{\hat{f}_{ck0}}{\hat{f}_{ck1}} = \frac{1 - 1.645V}{1 + t(0.05, n-1) \sqrt{1 + \frac{1}{n} V}}, \quad (7.19)$$

Note-se que este factor depende apenas do número de carotes n e da estimativa do coeficiente de variação V da resistência do betão.

A título de exemplo, suponha-se uma estrutura da qual se extraiu 5 carotes, as quais, depois de ensaiadas em laboratório, forneceram $\bar{f}_c = 40$ MPa e $V = 0.12$. A estimativa de f_{ck} desprezando a incerteza estatística é de $\hat{f}_{ck0} = (1 - 1.645 \times 0.12)40 = 32.1$ MPa. O factor de incerteza do ensaio directo, dado por (7.19), é igual a 1.115, o que significa que a estimativa de 32.1 MPa deve ser reduzida sensivelmente de

11.5% a fim de contabilizar o efeito da incerteza estatística. A estimativa Bayesiana de f_{ck} é assim de $\hat{f}_{ck1} = 32.1 / 1.115 = 28.8$ MPa.

Na Figura 7.6 representa-se α_1 em função do número n de carotes disponíveis, referente a um betão cuja resistência possui um coeficiente de variação de 0.12. Conforme se observa, para $n > 20$, o factor α_1 é inferior a 1.02. Isto significa que, para esse betão, a incerteza estatística associada a uma amostra de 20 carotes é praticamente nula (para efeitos de estimativa do valor característico). Por conseguinte, admitindo que essa amostra é representativa do elemento estrutural em avaliação e que o objectivo é estimar f_{ck} , certamente não haveria necessidade de complementar os ensaios de carotes com algum tipo de ensaio indirecto. Mas, suponha-se que era viável extrair da estrutura apenas 5 carotes. Ora, como se viu, para um betão com $V = 0.12$, o factor α_1 é de 1.115. Então, neste caso, provavelmente haveria vantagem em complementar as 5 carotes com algum tipo de ensaio indirecto. Ver-se-á mais à frente que tal dependerá da precisão do ensaio indirecto.

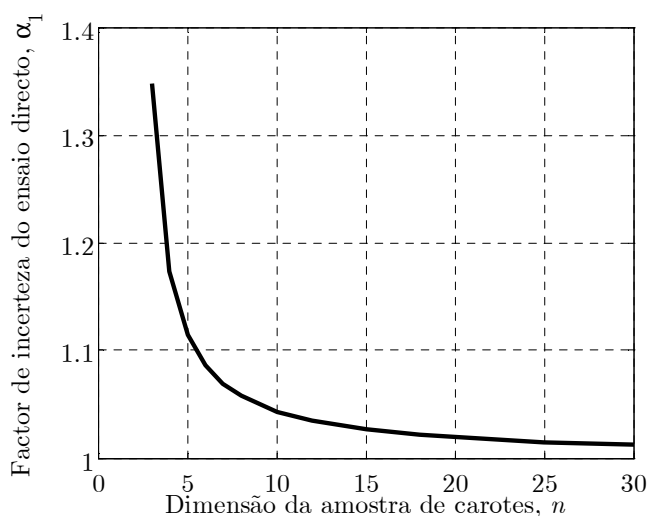


Figura 7.6: Factor de incerteza do ensaio directo para um betão com $V = 0.12$.

7.6.2 Incerteza na avaliação da resistência usando carotes e ensaio indirecto

Quando se recorre a um ensaio indirecto, a resistência do betão é avaliada por meio de uma grandeza correlacionada com a resistência, como a dureza superficial, no caso do esclerómetro. Vai admitir-se que a correlação entre a grandeza X medida pelo ensaio indirecto e a resistência f_c do betão cumpre os requisitos do modelo de

regressão linear, dado por (7.1). A incerteza na calibração é tida em conta através do modelo preditivo dado por:

$$\hat{f}_c = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{x})^2}{S_{xx}}} T_{n-2}, \quad (7.20)$$

onde $T_{n-2} \sim St(0, 1, n-2)$ e os restantes parâmetros têm o significado referido anteriormente.

A partir do modelo preditivo acima, o objectivo é agora determinar uma estimativa de f_{ck} , estimativa que representaremos por \hat{f}_{ck2} (para a distinguir da estimativa \hat{f}_{ck1} obtida usando só carotes). Esta será, portanto, a estimativa dada pelo ensaio indirecto. Não é possível derivar a partir de (7.20) uma expressão analítica para \hat{f}_{ck2} , equivalente à que se obteve para \hat{f}_{ck1} , uma vez que não é possível obter a forma fechada da distribuição de probabilidade subjacente ao modelo (7.20). Contudo, \hat{f}_{ck2} pode ser obtido via método de MC.

À semelhança do que se fez anteriormente, defina-se o factor:

$$\alpha_2 = \frac{\hat{f}_{ck0}}{\hat{f}_{ck2}}, \quad (7.21)$$

onde, recorde-se, $\hat{f}_{ck0} = (1 - 1.645V)\bar{f}_c$ e V e \bar{f}_c representam, respectivamente, o coeficiente de variação e média da amostra de carotes disponível. À semelhança do factor α_1 , o factor α_2 reflecte em que medida a estimativa \hat{f}_{ck0} deve ser reduzida a fim de ter em conta as incertezas inerentes ao uso do ensaio indirecto (incerteza na calibração e incerteza devido à falta de precisão do ensaio). É evidente que, de um ponto de vista estritamente probabilístico, só faz sentido usar o ensaio indirecto se este gerar menos incerteza que o ensaio directo, isto é, se $\alpha_2 < \alpha_1$. O factor α_2 será chamado *factor de incerteza do ensaio indirecto*.

Com o objectivo de determinar α_2 , desenvolveu-se a rotina que se descreve de seguida. Suponha-se que se extraíram de uma estrutura n carotes, a partir das quais se obtiveram as estimativas \bar{f}_c e V . Admita-se que, recorrendo aos resultados dos ensaios de carotes, se procedeu à calibração do ensaio indirecto, tendo-se obtido as estimativas dos parâmetros de regressão: $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}$. O factor α_2 pode então ser determinado como segue:

- 1) gera-se uma amostra $\{f_{c1}, \dots, f_{cm}\} \sim N(\bar{f}_c, V \cdot \bar{f}_c)$;
- 2) gera-se uma amostra $\{z_1, \dots, z_m\} \sim N(0, 1)$;
- 3) simula-se o uso do ensaio indirecto m vezes, determinando-se

$$x_i = (f_{ci} - \hat{\beta}_0 - \hat{\sigma} z_i) / \hat{\beta}_1, \quad i = 1, \dots, m;$$

- 4) avalia-se $\bar{x} = (1/m) \sum_{i=1}^m x_i$ e $s_X^2 = [1/(m-1)] \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2$;
- 5) determina-se $S_{xx} = (n-1)s_X^2$;
- 6) gera-se uma amostra $\{t_1, \dots, t_m\} \sim St(0, 1, n-2)$;
- 7) gera-se $f_{ci} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + \hat{\sigma} \sqrt{1 + 1/n + (x_i - \bar{x})^2 / S_{xx}}$, $i = 1, \dots, m$;
- 8) determina-se \hat{f}_{ck2} a partir do quantilho 0.05 da amostra $\{f_{c1}, \dots, f_{cm}\}$;
- 9) avalia-se $\alpha_2 = \hat{f}_{ck0} / \hat{f}_{ck2}$.

Deverá atribuir-se à variável m um valor suficientemente elevado, de modo a que estimativas de α_2 em corridas sucessivas da rotina sejam idênticas. Desta forma assegura-se que o erro inerente ao método de MC é diminuto. De referir que o uso sistemático da rotina mostrou que α_2 não depende dos parâmetros $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$, nem da média \bar{f}_c , dependendo apenas do número n de carotes disponíveis, da precisão do ensaio $\hat{\sigma}$ e do coeficiente de variação V da resistência do betão.

Considere-se novamente o exemplo apresentado na sub-secção anterior, onde, recorde-se, foram extraídas de uma estrutura 5 carotes que, depois de ensaiadas em laboratório, conduziram à estimativa $V = 0.12$. Para um ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 2$ MPa, a rotina acima forneceu $\alpha_2 = 1.08$, que é inferior a α_1 (1.115), concluindo-se assim que há vantagem em complementar os resultados das carotes com esse ensaio indirecto, admitindo que ele vai ser usado um número significativo de vezes.

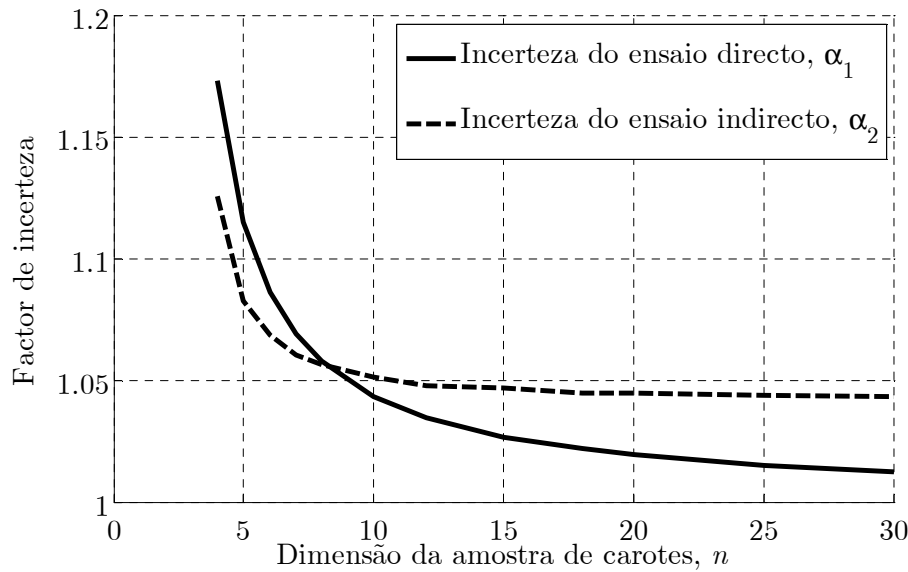


Figura 7.7: Factores de incerteza do ensaio directo e ensaio indirecto referentes a um betão com $V = 0.12$ e ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 2.0$ MPa.

Na Figura 7.7 mostra-se, para este mesmo exemplo, o factor α_2 em função do número n de carotes usadas na calibração do ensaio indirecto escolhido. Para efeitos comparativos, mostra-se também o gráfico do factor α_1 . Conforme se pode observar, para um ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 2.0$ MPa e para um betão com $V = 0.12$, tal ensaio indirecto deixa de ser atractivo se o número de carotes disponíveis for superior a 8, caso em que a incerteza só com carotes se torna mais pequena que a incerteza usando o ensaio indirecto em complemento das carotes.

Traçam-se de seguida curvas semelhantes (Figura 7.8), mas considerando que o betão é de qualidade inferior ($V = 0.18$). Conforme se observa, o número de carotes acima do qual o ensaio indirecto deixa de ser atractivo subiu para cerca de 18. Isto indica que quando o betão é de pior qualidade aumenta o interesse do uso de ensaios indirectos.

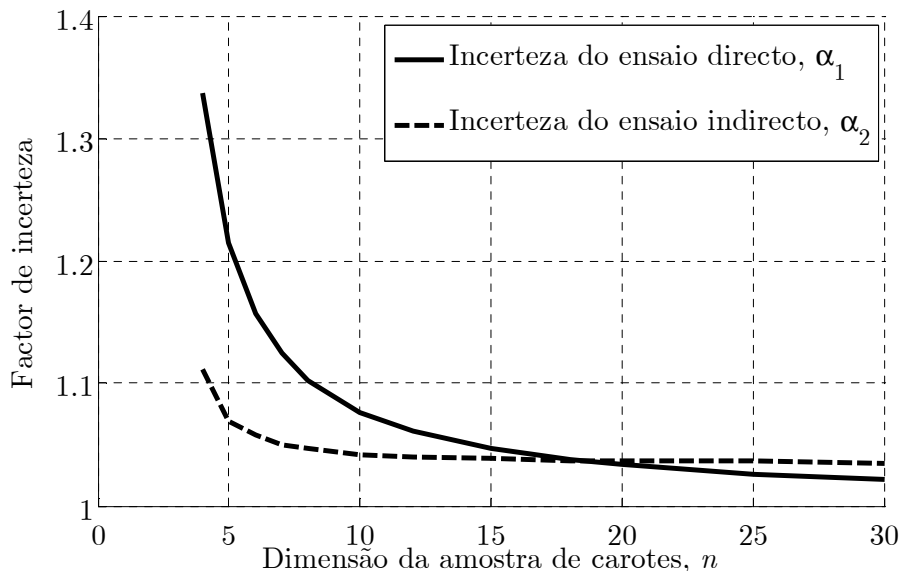


Figura 7.8: Factores de incerteza do ensaio directo e ensaio indirecto referentes a um betão com $V = 0.18$ e ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 2.0$ MPa.

Considere-se ainda um outro exemplo. Admita-se que o coeficiente de variação da resistência do betão foi estimado em $V = 0.12$ e que a precisão do ensaio indirecto é de $\hat{\sigma} = 3$ MPa. Conforme se pode observar na Figura 7.9, a incerteza associada ao uso deste ensaio é sempre superior à incerteza associada ao uso exclusivo de carotes. Assim, se o objectivo for estimar a resistência característica do betão, esse ensaio indirecto não é atractivo, mesmo quando o número de carotes disponíveis é pequeno.

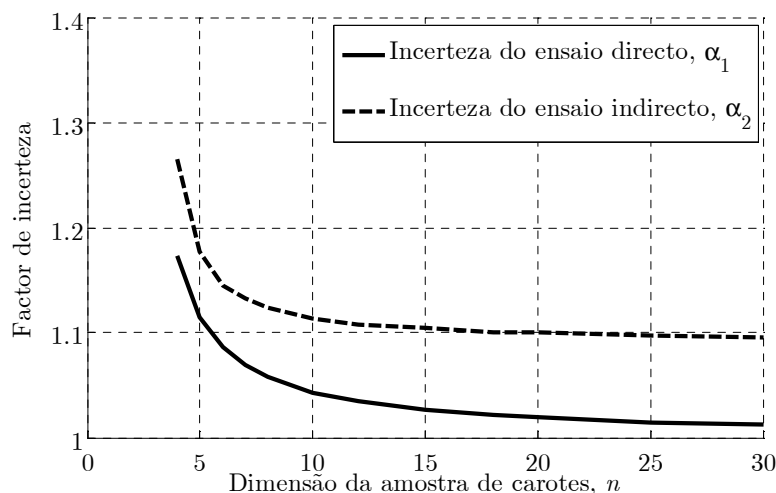


Figura 7.9: Factores de incerteza do ensaio directo e ensaio indirecto referentes a um betão com $V = 0.12$ e ensaio indirecto com $\hat{\sigma} = 3.0$ MPa.

Considere-se agora o exemplo com dados reais analisado na secção 7.5. As carotes disponíveis ($n = 21$) conduzirem à estimativa $V = 0.19$. O esclerómetro evidenciou uma precisão de $\sigma = 2.12$ MPa. A partir destes dados obtém-se $\alpha_1 = 1.04$ e $\alpha_2 = 1.16$. Quer dizer, as carotes só por si geram menos incerteza que os resultados do esclerómetro, ou, por outras palavras, o esclerómetro não é muito atractivo no presente caso. No entanto, de acordo com os resultados apresentados na Tabela 7.3, o valor característico da resistência do betão usando o levantamento esclerométrico é superior ao que se obteve usando apenas as carotes. Isto sugere que a amostra de índices esclerométricos disponível diz respeito a locais da estrutura mais favoráveis que a amostra de carotes. Assim, a amostra a usar (para efeitos da estimativa da resistência do betão) deve ser a que for julgada mais representativa da estrutura, que em princípio é a amostra dos índices esclerométricos, por ter dimensão superior.

7.7 Proposta de metodologia para avaliação da resistência do betão de estruturas existentes

Com base nos resultados obtidos nas secções anteriores, propõe-se de seguida uma metodologia para a caracterização da resistência característica do betão numa estrutura ou dum elemento estrutural como um todo. A metodologia pressupõe o uso de um ensaio indirecto em associação com ensaio de carotes. Admite-se ainda que a relação entre a resistência do betão e os valores medidos pelo ensaio indirecto satisfaz os requisitos da regressão linear.

Uma vez escolhido o ensaio indirecto, procede-se como segue:

- 1) Começa-se por proceder ao levantamento exaustivo da estrutura (ou de uma das suas partes) com o ensaio indirecto. Este levantamento constituirá uma primeira indicação onde o betão se apresenta com características extremas.
- 2) Com base nos resultados obtidos na fase anterior, seleccionam-se os locais para extracção de carotes, procurando que esta amostra seja tanto quanto possível representativa do elemento ou elementos em avaliação. O número de carotes n a extrair dependerá naturalmente das condições locais, como o volume de betão a caracterizar, por exemplo. As carotes serão então ensaiadas em laboratório, o que permite obter uma amostra de n pares $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, onde x_i indica o resultado do ensaio indirecto realizado no local i e y_i a resistência da carote do mesmo local
- 3) A partir da amostra $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ procede-se à calibração do ensaio indirecto, estimando os parâmetros β_0 , β_1 e σ .
- 4) Com base no parâmetro σ e na estimativa do coeficiente de variação V do betão efectuada a partir dos resultados das carotes, avalia-se a qualidade do ensaio indirecto, recorrendo ao algoritmo desenvolvido na secção anterior (determinação dos coeficientes de incerteza α_1 e α_2). Se a incerteza originada pelo ensaio indirecto for inferior à incerteza originada pelo ensaio de carotes, caracteriza-se a resistência do betão usando os resultados do ensaio indirecto, recorrendo ao modelo preditivo expresso na Eq. (7.13). Caso contrário, usam-se apenas os resultados das carotes, a não ser que esta amostra não possa ser considerada representativa do elemento em estudo, caso em que se deve optar pelos resultados do ensaio indirecto.

7.8 Considerações finais

Sempre que se deseje avaliar a resistência do betão de uma estrutura existente, o recurso a ensaio de carotes constitui o método de referência, por se tratar do método disponível mais preciso, constituindo assim a base para a calibração de NDTs. Demonstrou-se como se pode usar um ensaio indirecto (devidamente calibrado) para a definição do modelo preditivo da resistência do betão de uma estrutura existente, levando em conta as diferentes fontes de incerteza envolvidas. Uma vez que os ensaios indirectos são muito mais económicos e de uso mais simples que o ensaio de carotes, é possível obter com relativa facilidade várias dezenas ou mesmo centenas de leituras. A redução na incerteza estatística que se obtém graças ao elevado número de leituras pode compensar as incertezas introduzidas pelo ensaio indirecto (incerteza na calibração e a incerteza devido à falta de precisão do ensaio). O uso de ensaios indirectos pode pois revelar-se benéfico. Mas mesmo que não haja lugar à referida

compensação, não significa que os resultados obtidos com o ensaio indirecto sejam de rejeitar. Se a amostra de carotes disponível não poder ser considerada representativa da estrutura em avaliação, os resultados obtidos com o ensaio indirecto devem ser utilizados, mesmo que conduzam a um valor característico da resistência do betão mais baixa.

Demonstrou-se que, para um dado betão (caracterizado por um determinado coeficiente de variação) e para um dado ensaio indirecto (caracterizado por uma determinada precisão) é possível determinar número de carotes acima do qual a incerteza estatística associada ao uso exclusivo das carotes se torna mais pequena que a incerteza introduzida pelo ensaio indirecto. Conhecer esse número ajuda a decidir se os resultados do ensaio indirecto devem ou não ser usados.

Enfatiza-se que os resultados apresentados são válidos apenas para ensaios indirectos que cumprem os requisitos da regressão linear. Contudo, o estudo é facilmente adaptado a ensaios indirectos que satisfaçam outros tipos de regressão.

Finalmente, é importante salientar que a determinação do número de carotes acima do qual determinado ensaio indirecto deixa de ser atractivo, visou apenas a estimativa do quantilho 0.05 da resistência do betão, valor tradicionalmente usado na verificação da segurança de estruturas pelo método dos coeficientes parciais de segurança. Como se sabe, a incerteza estatística aumenta quando se deseja estimar quantis mais pequenos. Isto significa que, se se desejar estimar quantis inferiores a 0.05, aumenta a conveniência em dispor-se de mais resultados, o que vem favorecer o uso de ensaios indirectos.

Capítulo 8

Caso de estudo

8.1 Considerações iniciais

Quando uma ponte não cumpre os critérios de segurança para pontes novas, a decisão de reforçar a estrutura deve ser ponderada cuidadosamente. Frequentemente, recorrendo a metodologias mais avançadas e realistas, é possível demonstrar que a segurança da ponte está dentro dos limites considerados aceitáveis, o que permite evitar obras de reforço e assim evitar custos desnecessários. Neste capítulo avalia-se a segurança de uma ponte existente, cuja degradação atingiu um nível tal que a sua substituição foi considerada melhor solução que a solução de reparação, quer do ponto de vista técnico quer do ponto de vista económico. Assim, o problema de decidir se a ponte deveria ou não ser reforçada não chegou a ser equacionado. Apesar disso, este exemplo permitirá apreciar os benefícios do uso de metodologias mais avançadas de verificação da segurança.

Além disso, o caso de estudo que se apresenta permitirá aplicar algumas das metodologias desenvolvidas nos capítulos anteriores, e muito em especial as potencialidades das metodologias Bayesianas. Após uma breve descrição da ponte objecto de estudo, procede-se à avaliação da segurança da ponte, começando por uma análise determinística tradicional baseada nos critérios estabelecidos no RSA (1983), que é o regulamento sobre segurança e acções actualmente em vigor. Esta primeira análise — que se designará por verificação preliminar da segurança — permitirá ter uma primeira noção do estado de segurança da ponte, e ainda identificar os cenários de ruína críticos da estrutura, após o que se procederá a verificações da segurança mais avançadas, incidindo nesses cenários críticos.

8.2 Breve descrição da ponte

A ponte objecto de estudo, com projecto datado de 1968, é constituída por um tabuleiro em laje vigada, contínua, assente em dois encontros perdidos e dois pilares fundados no leito do rio (Figura 8.1). Os vãos têm comprimentos de 18.6 m, 22.8 m e 18.6 m, o que perfaz um comprimento total de 60 m. O atravessamento do rio faz-se segundo um alinhamento com direcção aproximadamente Sul–Norte e um viés em relação ao rio de cerca de 19° . O apoio do tabuleiro nos encontros e pilares é realizado por intermédio de aparelhos de apoio, deslizantes nos pilares e no Encontro Norte, e fixos no Encontro Sul. O encontro Sul é, por conseguinte, o elemento estrutural com maior contribuição para a resistência à acção sísmica e outras acções horizontais.



Figura 8.1: Vista de Sul para Norte da ponte objecto de estudo.

As vigas longitudinais, em número de quatro, encontram-se ligadas superiormente por uma laje de espessura variável onde assenta a plataforma de rodagem (com duas vias de tráfego) e dois passeios laterais. As vigas possuem altura de 1.25 m, constante ao longo de todo o seu desenvolvimento, e uma largura de 0.50 m nos terços centrais dos tramos, aumentando linearmente até 1.10 m nos terços de vão junto aos apoios (pilares e encontros). As vigas longitudinais encontram-se ainda ligadas entre si por dez vigas transversais (carlingas), uma por cada apoio e duas por cada tramo. As carlingas dos tramos localizam-se a terços de vão. Na Figura 8.2 mostram-se algumas das características geométricas mais importantes do tabuleiro da ponte, assim como a designação dos elementos estruturais adoptada no presente estudo.

Refira-se ainda que as fundações dos pilares e encontros são do tipo indirecto, constituídas por estacas de betão armado com secção rectangular $0.30 \times 0.30 \text{ m}^2$, pré-fabricadas e cravadas no terreno de fundação.

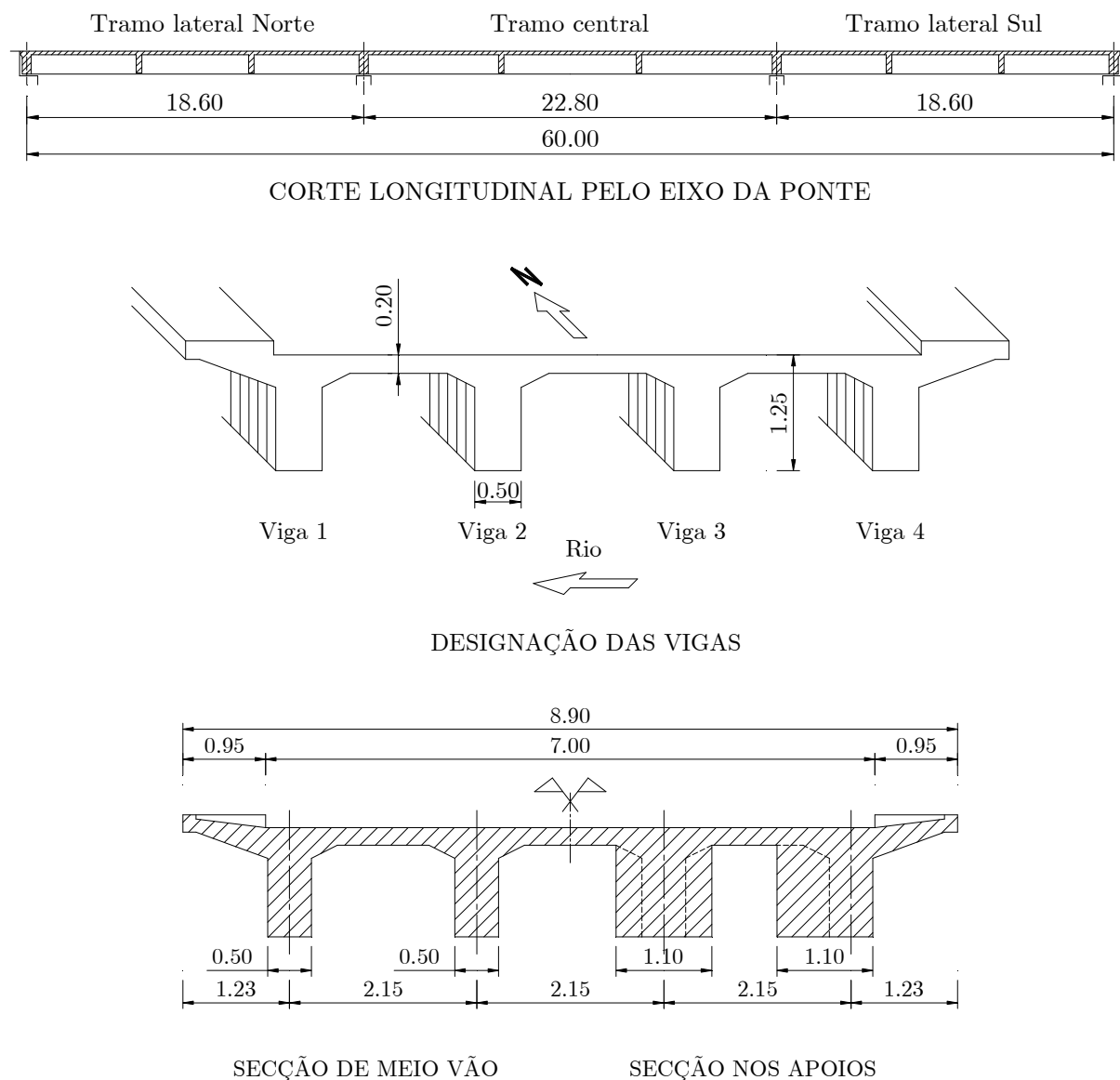


Figura 8.2: Algumas das características geométricas mais importantes do tabuleiro (dimensões em metros).

A ponte localiza-se junto à foz do rio e encontra-se actualmente num estado muito avançado de degradação, em parte devido ao ambiente de elevada agressividade onde se insere (ambiente marítimo). As Figuras seguintes documentam o estado actual de deterioração do tabuleiro, mais acentuado na Viga 1 do tramo Sul, onde se observam armaduras expostas com perda de secção significativa.

Foram realizadas várias campanhas de inspecção e ensaio a esta ponte que demonstraram níveis muito elevados de contaminação por cloretos. Ensaio electroquímicos revelaram a existência de corrosão activa mesmo em elementos cujo betão não apresentava sinais visíveis de degradação, nomeadamente nos pilares e encontros.



Viga 1



Viga 3



Viga 2



Viga 4

Figura 8.3: Tramo Sul (Verão de 2010) — vistas de Sul para Norte.

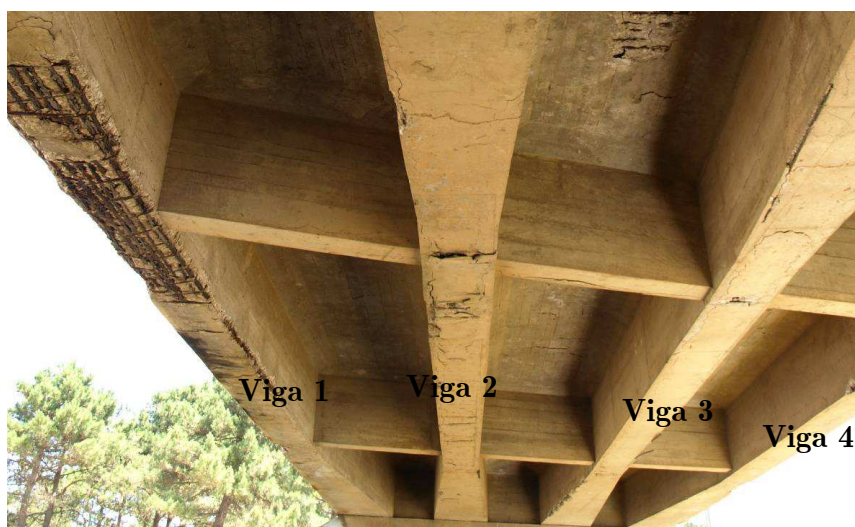


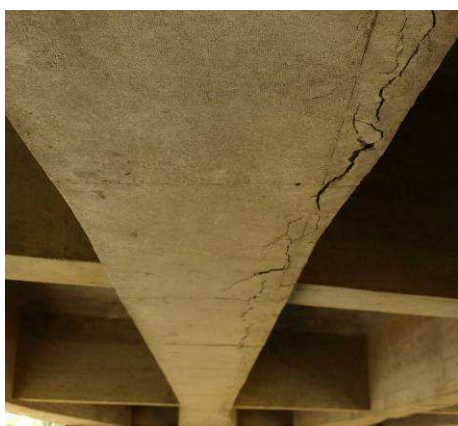
Figura 8.4: Tramo central (verão de 2010) — vista de Sul para Norte



Viga 1



Viga 2



Viga 3



Viga 4

Figura 8.5: Tramo Norte (verão de 2010) — vistas de Norte para Sul.

De referir que o prazo previsto para a substituição da ponte é de sensivelmente um ano, a partir da data da elaboração do presente estudo (Verão de 2010). Isto significa que o tempo de vida útil residual é de aproximadamente um ano, sendo este um dado significativo para o problema.

Uma vez que o nível de degradação atingiu proporções significativas principalmente no tabuleiro, as preocupações de segurança da ponte dizem respeito naturalmente à capacidade de carga da superestrutura. De acordo com estudos anteriores, a segurança dos pilares e encontros, incluindo as fundações, não suscita dúvidas. Assim, este capítulo trata apenas da verificação da segurança do tabuleiro.

Na próxima secção faz-se uma análise tradicional da segurança baseada no método dos coeficientes parciais de segurança, em harmonia com o estipulado no RSA (1983).

8.3 Verificação preliminar da segurança

8.3.1 Materiais

De acordo com o projecto original, o betão adoptado no tabuleiro, bem como na elevação de pilares e encontros, deveria ter uma dosagem mínima de 350 kg de cimento por m^3 , tendo a resistência mínima aos 28 dias sido especificada em 30 MPa. Na Tabela 8.1 reproduz-se os resultados obtidos em ensaios de 9 carotes extraídas da estrutura.

Tabela 8.1: Resultados de ensaios de carotes extraídas da ponte em estudo.

Localização dos provetes	Identificação dos provetes	Massa [g]	Altura [mm]	Secção [mm ²]	Carga de rotura [kN]	Tensão de rotura [MPa]
Enc. Sul	EE3	1870	99	7698	487.7	63.5
	EE4-1	1873	99	7698	503.9	65.5
	EE4-2	1885	99	7698	528.4	68.5
Viga 4	V4ME1	1868	99	7698	344.8	45.0
	V4ME3-1	1876	99	7698	314.3	41.0
	V4ME3-2	1887	99	7698	342.0	44.5
Pilar Sul	P1	1160	84	5542	336	60.5
	P2	1140	84	5542	207	37.5
	P3	1151	84	5542	190	34.5

Um primeiro aspecto que ressalta da Tabela acima é a elevada dispersão das resistências à compressão do betão: o valor mínimo é de 34.5 MPa e o valor máximo é de 68.5 MPa, quase o dobro do valor mínimo. No entanto, as três carotes extraídas do tabuleiro têm resistências relativamente próximas. O valor característico da resistência do betão pode ser estimado usando os resultados das nove carotes ou usando apenas as três carotes extraídas do tabuleiro. Qualquer dos procedimentos é legítimo. De facto, o projecto especificou idênticas características para o betão dos pilares, encontros e tabuleiro, pelo que há legitimidade para considerar as nove carotes acima como pertencendo à mesma população. Assim, parece razoável que o procedimento a adoptar seja aquele que conduza à resistência característica mais baixa. Note-se que se se usar todas as carotes (em vez de apenas as três referentes ao tabuleiro) tem-se um desvio padrão superior, mas uma incerteza estatística inferior, pelo que à partida não é evidente qual dos procedimentos conduz à resistência característica mais baixa.

A fim de estimar o valor característico da resistência do betão, começa-se por escolher um modelo probabilístico para essa variável. Usualmente a resistência do betão é descrita por um modelo Normal ou por um modelo Lognormal. No presente

caso, e atendendo ao facto de se observar uma certa tendência para existirem valores elevados da resistência, julga-se que o modelo Lognormal é mais adequado. Por outro lado, uma vez que se deve estimar a resistência característica levando em conta a incerteza estatística, vai usar-se o modelo preditivo Bayesiano referente a uma população Lognormal, modelo este que será discutido mais em pormenor na subsecção 8.5.1. Usando então o modelo preditivo de uma população Lognormal, obteve-se $\hat{f}_{ck} = 29.7$ MPa considerando todas as carotes e $\hat{f}_{ck} = 36.6$ MPa considerando apenas as carotes extraídas do tabuleiro. Assim, é mais desfavorável considerar a totalidade das carotes. Para efeitos de aplicação do método dos coeficientes parciais de segurança, vai adoptar-se para o betão a classe C25/30, cuja resistência possui o valor de cálculo $f_{cd} = 16.7$ MPa.

Relativamente às armaduras, e de acordo com o projecto da ponte, foi adoptado em toda a estrutura aço A-40, endurecido e nervurado. Este aço corresponde à classe actual A400. Assim, adoptando um coeficiente de segurança $\gamma_s = 1.15$, o valor de cálculo a adoptar para a resistência do aço é de $f_{syd} = 400 / 1.15 = 348$ MPa. Relativamente ao coeficiente de 1.15, que é o coeficiente especificado tanto na regulamentação portuguesa em vigor como nos eurocódigos, refira-se que já era preconizado no Anexo I do REBA (1967) que entrou em vigor cerca de um ano antes da data da elaboração do projecto.

8.3.2 Acções

Uma vez que as preocupações de segurança da ponte em estudo dizem respeito à capacidade de carga do tabuleiro, as acções que interessa quantificar são apenas as cargas permanentes e as sobrecargas rodoviárias. Relativamente às cargas permanentes (pesos próprios de elementos estruturais e não estruturais), adoptam-se os pesos específicos usuais, como segue: (1) betão armado: 25 kN/m^3 ; (2) enchimento de passeios em betão simples: 24 kN/m^3 ; (3) betão betuminoso: 24 kN/m^3 ; (4) elementos metálicos: 77 kN/m^3 .

Relativamente às sobrecargas rodoviárias e atendendo ao itinerário servido pela ponte (estrada florestal com tráfego pouco intenso), considera-se razoável classificar a ponte como pertencendo à classe II prevista no RSA (1983). Para pontes desta classe, as sobrecargas consistem em dois tipos de cargas a aplicar separadamente, devendo-se escolher a que for mais desfavorável para o estado limite em consideração. O primeiro tipo de carga, usualmente designado por veículo-tipo, consiste num sistema em *tridem* (3 eixos) com peso total de 300 kN, a que corresponde um peso por eixo de 100 kN (ou 50 kN por roda). Os eixos distam entre si de 1.50 m e a largura do veículo (distância entre rodas) é de 2.00 m. O segundo tipo consiste numa carga

uniformemente distribuída com valor de 3 kN/m^2 , a que se deve juntar uma única carga linear de 30 kN/m (frequentemente referida como «carga de faca»), posicionada transversalmente ao eixo da ponte e no local mais desfavorável para o estado limite em consideração. De acordo com o RSA (1983), os valores acima já incluem os efeitos de amplificação dinâmica. Refira-se que no presente estudo o veículo-tipo produz na maioria das situações efeitos mais gravosos.

Tem interesse comparar estas cargas com as cargas adoptadas no projecto original, que foi desenvolvido em harmonia com o RSEP (1961). De acordo com o artigo 24.º desse regulamento, para pontes da classe B (que foi a classe atribuída à ponte pelo projectista), as sobrecargas consideradas consistiram em dois sistemas de cargas com configuração idêntica às descritas acima, porém, com valores diferentes. O peso do veículo-tipo considerado no projecto original foi de 450 kN , que foi ainda afectado de um coeficiente dinâmico de 1.20. O peso do veículo considerado foi assim de $1.20 \times 450 = 540 \text{ kN}$, ou seja, 1.8 vezes superior ao peso do veículo considerado no presente estudo. Relativamente à sobrecarga uniformemente distribuída e sobrecarga linear, o projecto original considerou, respectivamente, 3 kN/m^2 e 50 kN/m .

Do acima exposto resulta que a avaliação da segurança da ponte será efectuada usando sobrecargas inferiores às adoptadas no projecto original. Naturalmente questiona-se se as sobrecargas que se estão a utilizar (veículo com 300 kN de peso), embora estejam em harmonia com o RSA (1983), não serão demasiado baixas. A este respeito, refira-se que num ensaio de carga realizado recentemente a uma ponte, foram usados veículos de 4 eixos com a geometria indicada na Figura 8.6, carregados de areia. O peso máximo registado (camião cheio de areia) foi de 350 kN e a distância mínima registada entre o *tandem* dianteiro e o *tandem* traseiro foi de 4.00 m . Um veículo com estas características produz numa viga simplesmente apoiada com vão de 22.8 m (que é o vão central da ponte em estudo) um momento de 1645 kNm . O veículo-tipo considerado no presente estudo (peso de 300 kN) produz na mesma viga um momento de 1560 kNm , que é apenas 5% inferior ao momento provocado pelo veículo comercial representado na Figura 8.6. Estas considerações mostram que o peso do veículo considerado na ponte em estudo parece razoável, principalmente por se tratar de uma ponte que serve uma estrada secundária, sem tráfego pesado de assinalar. Note-se também que o peso do veículo considerado vai ainda ser afectado de um factor de segurança de 1.50 para ter em consideração o facto de, entre outros factores, poder circular na ponte um veículo com peso superior ao valor considerado. Por outro lado, deve-se ter presente que o peso do veículo tipo acima refere-se à distribuição de máximos em 50 anos e a ponte vai estar em serviço durante apenas 1 ano, pelo que haveria legitimidade para reduzir o valor do peso regulamentar. No entanto, nesta fase do estudo, optou-se por não efectuar qualquer redução.

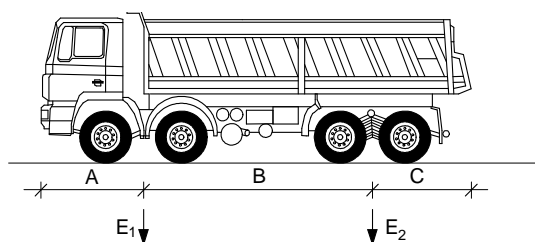
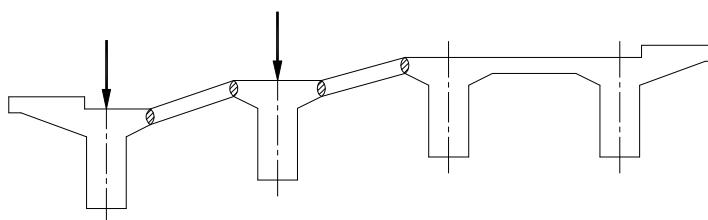


Figura 8.6: Configuração de um caminhão comercial de 4 eixos usado num ensaio de carga recente.

Como se verá, o veículo-tipo produz em geral efeitos mais gravosos que os provocados pela sobrecarga uniforme mais a sobrecarga linear. Relativamente aos efeitos que esse veículo produz, podem idealizar-se os modos de ruína esquematizados na Figura 8.7, consoante o veículo circule junto às bermas ou junto ao eixo central. Note-se que a largura do veículo (distância entre rodas) coincide sensivelmente com a distância entre vigas. Os modos de ruína ilustrados na Figura sugerem que se considere actuando em cada viga a totalidade do peso dum rodado, procedimento este naturalmente conservativo, dada a influência que as carlingas intermédias têm na repartição transversal de cargas. De qualquer forma, independentemente dessa influência, o procedimento acima (consideração da totalidade do peso de uma roda sobre uma viga) seria equivalente a considerar a presença de dois veículos em cima da ponte lado a lado, situação que não é de todo inverosímil. Justifica-se assim aplicar em cada viga a totalidade do peso dum rodado.

VEÍCULO CIRCULANDO JUNTO ÀS BERMAS:



VEÍCULO CIRCULANDO JUNTO AO EIXO DA PONTE:

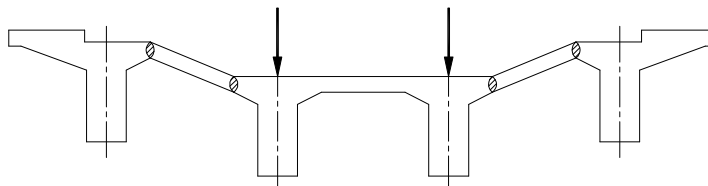


Figura 8.7: Modos de ruína idealizados para o tabuleiro.

8.3.3 Esforços

Os esforços no tabuleiro foram avaliados por meio de um modelo de viga contínua de inércia constante, embora, na realidade, devido ao espessamento das vigas nos terços

de vão junto aos apoios, a inércia não seja efectivamente constante. A diferença nos esforços elásticos entre a situação real e a do modelo não é, contudo, significativa, e, além disso, a consideração de inércia constante equivale a introduzir uma redistribuição de esforços (ligeira, no presente caso), não afectando assim a segurança aos estados limites últimos. Adoptando um modelo de inércia constante, os esforços elásticos tornam-se independentes da inércia da viga.

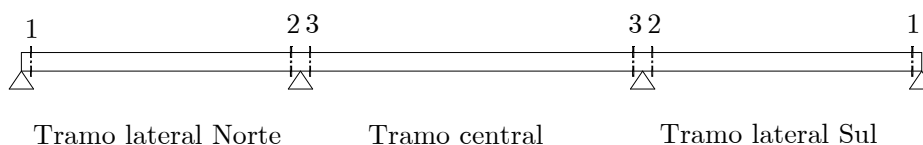
O modelo de cálculo acabado de descrever foi sujeito às acções descritas na subsecção anterior, quantificadas para a largura de influência de cada viga. As Tabelas seguintes mostram os esforços obtidos no tabuleiro (momentos flectores e esforços transversos).

Tabela 8.2: Momentos flectores actuantes nas vigas [kNm]

Viga	Secção	<i>PP</i>	<i>RCP</i>	<i>VT</i>	<i>SCU+CF</i>	<i>Msd</i>
exterior	Tramo lateral	720	122	498	394	1902
	Apoio	-1296	-217	-293	-418	-2702
	Tramo central	608	108	506	410	1742
interior	Tramo lateral	710	63	498	471	1800
	Apoio	-1267	-113	-293	-444	-2546
	Tramo central	592	56	506	487	1237

Tabela 8.3: Esforços transversos actuantes nas vigas [kN]

Viga	Secção	<i>PP</i>	<i>RCP</i>	<i>VT</i>	<i>SCU+CF</i>	<i>Vsd</i>
exterior	1	228	35	124	96	546
	2	368	58	137	121	789
	3	364	57	137	126	782
interior	1	222	18	124	115	513
	2	359	30	137	139	738
	3	353	27	137	144	733



Comparando os esforços das vigas exteriores com os esforços das vigas interiores, constata-se que as primeiras possuem esforços superiores. Constata-se também que o *VT* (veículo-tipo) produz em geral esforços maiores do que a *SCU + CF* (Sobrecarga uniformemente distribuída mais carga de faca). Uma excepção diz respeito aos momentos nos apoios, onde os esforços provocados pela *SCU + CF* são superiores. Porém, como vai ver-se, a secção de apoio não é condicionante, pelo que se pode afirmar que a segurança da ponte em estudo é condicionada pelo *VT*.

8.3.4 Verificação da segurança

Factor de capacidade de carga

No texto que segue introduz-se o conceito de factor de capacidade de carga, equivalente ao *rating factor* usado nos EUA no âmbito da avaliação de segurança de pontes existentes (SAMARIS, 2006a). Relativamente ao EL último de flexão, define-se factor de capacidade de carga γ como sendo o factor a aplicar ao momento provocado pela sobrecarga de modo a que o momento actuante de cálculo iguale o momento resistente de cálculo, isto é:

$$\begin{aligned} \gamma : 1.35M_{PP} + 1.5M_{RCP} + 1.5\gamma M_{SC} &= M_{Rd} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma &= \frac{M_{Rd} - 1.35M_{PP} - 1.5M_{RCP}}{1.5M_{SC}} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Relativamente ao EL último de esforço transversal, de forma inteiramente semelhante, o factor de capacidade de carga é definido por:

$$\gamma = \frac{V_{Rd} - 1.35V_{PP} - 1.5V_{RCP}}{1.5V_{SC}} \quad (8.2)$$

A verificação da segurança é satisfeita quando $\gamma \geq 1$. O factor de capacidade de carga da estrutura será o menor de todos os γ obtidos para os diferentes estados limites.

Estado limite último de flexão

A viga 1 é a condicionante, não só por apresentar níveis de corrosão superiores aos das restantes vigas, mas também por se tratar de uma via exterior que, como se viu, apresenta esforços superiores aos das vigas interiores. Interessa analisar 3 secções: (1) secção de meio vão do tramo lateral, (2) secção de apoio e (3) secção de meio vão do tramo central.

Relativamente à secção do meio vão do tramo lateral e de acordo com o projecto, a secção dispõe de 3 camadas com 5 ϕ 25 cada, mas, como se viu no início deste capítulo, particularmente no tramo lateral Sul, a primeira camada de armadura encontra-se fortemente corroída. Assim, vai considerar-se apenas a contribuição da segunda e terceira camadas de armadura, que para o efeito serão consideradas intactas. A Figura 8.8 mostra as características desta secção necessárias à avaliação do momento resistente M_{Rd} . Os recobrimentos e posições de armadura estão de acordo com um levantamento realizado à estrutura com auxílio de um pacómetro. Obteve-se $M_{Rd} = 1834$ kNm, conduzindo a um factor de capacidade de carga de $\gamma = 0.91$, que por ser inferior à unidade, indica que a segurança não se encontra satisfeita.

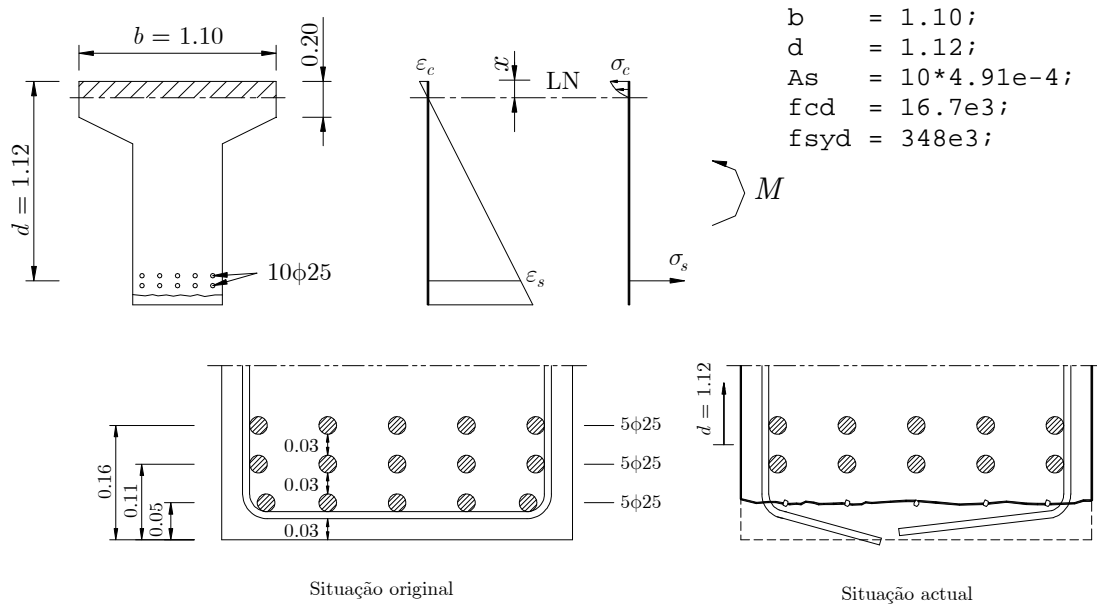


Figura 8.8: Características da secção de meio vão do tramo lateral Sul (viga 1).

Relativamente à secção de apoio, cujas características geométricas e armaduras (que se consideraram intactas) estão representadas na Figura 8.9, obteve-se $M_{Rd} = 3050$ kNm, que conduz a um factor de capacidade de carga de $\gamma = 1.55$. A secção de apoio dispõe assim de uma boa reserva de segurança.

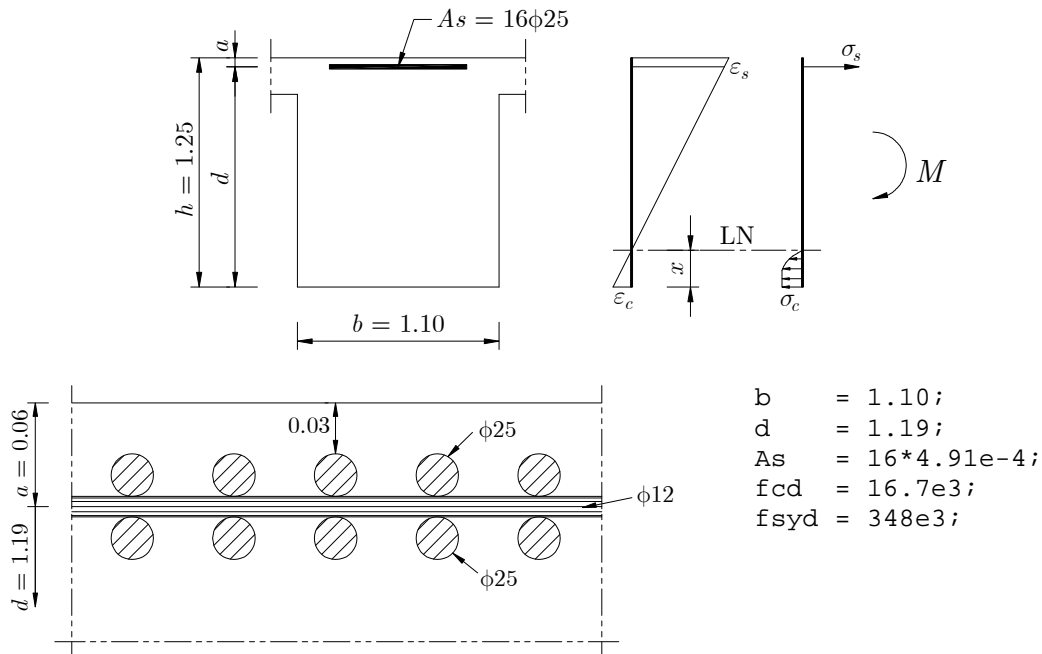


Figura 8.9: Características da secção de apoio (viga 1).

Passando agora para a secção de meio vão do tramo central, cuja armadura consiste em duas camadas de varões, a primeira com $6\phi 25$ e a segunda com $5\phi 25$, vai admitir-se que a primeira camada apresenta uma perda de secção de 50% (ver Figura 8.4). A Figura 8.10 mostra as características da secção que conduziram a um momento resistente de $M_{Rd} = 1535 \text{ kNm}$ e um factor de capacidade de carga de $\gamma = 0.73$.

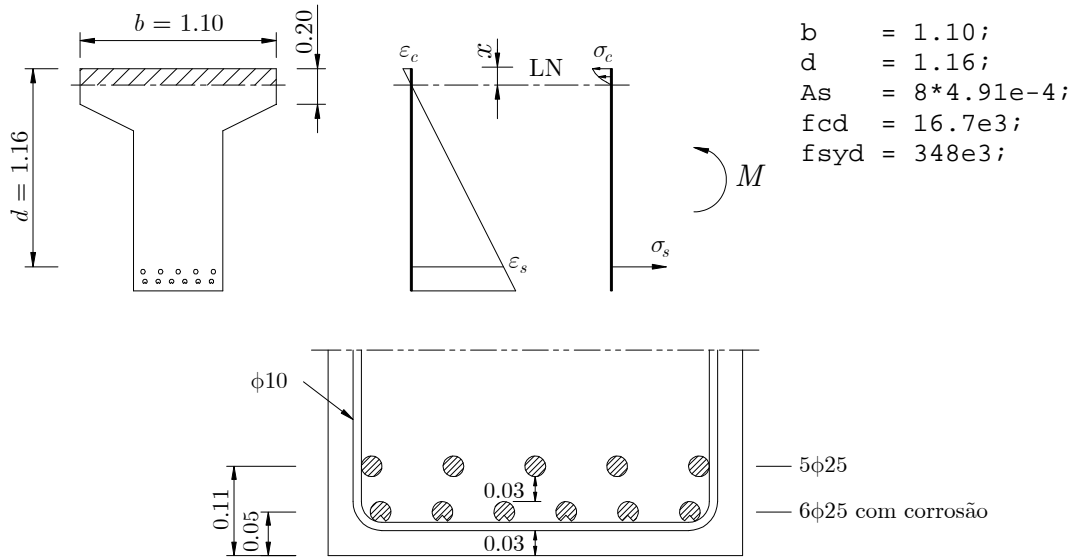


Figura 8.10: Características da secção de meio vão do tramo central (viga 1).

Estado limite último de esforço transversal

De acordo com o projecto, a armadura para atender ao esforço transversal é constituída por estribos ($\phi 10/0.20$) e por varões inclinados, sendo semelhante nas vigas exteriores e interiores. Ora, visto que os esforços transversos são superiores nas vigas exteriores, conclui-se que estas são as vigas condicionantes. Na verificação da segurança vai adoptar-se o modelo de resistência preconizado na NP EN 1992-1-1 (2010) que prevê o uso de bielas com inclinação θ variável. Adopta-se no presente estudo $\theta = 30^\circ$.

Para verificar a segurança ao esforço transversal é necessário comprovar que as forças actuantes nas armaduras (forças de tracção) e nas bielas de betão (forças de compressão) não excedem as respectivas resistências. Relativamente às primeiras, o esforço transversal máximo (associado à plastificação das armaduras) é dado pela expressão (NP EN 1992-1-1, 2010):

$$V_{Rd} = f_{syd} \frac{A_{sw}}{s} z (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha, \quad (8.3)$$

onde as variáveis têm o significado indicado na Norma citada. Em particular z representa o braço das forças internas, podendo então ser determinado pela expressão: $z = M_{Rd} / (f_{syd} A_s)$. Assim, relativamente à secção de apoio nos pilares, onde o esforço transversal é máximo e cujo momento resistente foi estimado em 3050 kNm, tem-se: $z = 3050 / (34.8 \times 16 \times 4.91) = 1.12$ m. Considerando estribos com dois ramos de $\phi 10/0.20$ mais a contribuição de $2\phi 25$ afastados de cerca de 1.00 m e inclinados a 45° , tem-se:

$$V_{Rd} = 34.8 \frac{2 \times 0.79}{0.20} 1.12 (\cotg 30^\circ + 0) \times 1 + \\ + 34.8 \frac{2 \times 4.91}{1.00} 1.12 (\cotg 30^\circ + \cotg 45^\circ) \sin 45^\circ = 1273 \text{ kN}.$$

Relativamente à compressão actuante nas bielas, o esforço transversal máximo associado ao esmagamento do betão é dado pela expressão (NP EN 1992-1-1, 2010):

$$V_{Rd, \max} = \frac{\nu f_{cd} b_w z}{\cotg \theta + \tg \theta}, \quad (8.4)$$

onde as variáveis têm o significado expresso na Norma citada e o factor ν é dado por $\nu = 0.60 (1 - f_{ck} / 250) = 0.60 (1 - 25 / 250) = 0.54$. Tem-se pois:

$$V_{Rd, \max} = \frac{0.54 \times 16.7 \times 10^3 \times 1.10 \times 1.12}{\cotg 30^\circ + \tg 30^\circ} = 4811 \text{ kN}. \quad (8.5)$$

Assim, o esforço transversal resistente de cálculo é igual a 1273 kN (o menor dos dois valores acima). Considerando que o esforço transversal actuante é de 789 kN, constata-se que a segurança ao esforço transversal está satisfeita com uma boa margem de segurança.

Relativamente à secção de apoio nos encontros, verifica-se que o esforço transversal resistente é semelhante ao da secção nos apoios nos pilares, mas o esforço transversal actuante é inferior. Assim, a segurança ao estado limite último de esforço transversal também se encontra satisfeita nesta secção.

8.3.5 O problema da diminuição de aderência provocada pela delaminação do betão

Como se sabe, em estruturas de betão armado, a resistência à flexão e ao esforço transversal depende de uma boa aderência entre as armaduras e o betão. Em estruturas de betão armado em bom estado de conservação, a aderência não constitui em geral um problema, mas em estruturas com armaduras corroídas e betão delaminado (causado pela expansão dos produtos da corrosão), este problema deve ser examinado (Sarveswaran & Roberts, 1999).

Relativamente à resistência à flexão, num troço de viga com altura e momento constantes, a força na armadura longitudinal é constante, não havendo por conseguinte activação das forças de aderência. Assim, num caso de flexão pura, a aderência é importante principalmente nas extremidades das armaduras, onde é necessário garantir uma eficaz amarração.

Já em zonas com momento flector variável, isto é, zonas sujeitas a esforço transversal (que é a situação mais comum), a força nas armaduras longitudinais varia, originando o aparecimento de forças tangenciais de aderência. Pode-se demonstrar que a tensão de aderência τ_b entre as armaduras longitudinais e o betão numa secção com esforço transversal V é dada por:

$$\tau_b = \frac{V}{u \cdot z}, \quad (8.6)$$

onde u representa o perímetro das armaduras e z o braço das forças internas. Vê-se assim que as tensões de aderência são máximas nas secções onde o esforço transversal é máximo.

As considerações acima mostram que a aderência entre as armaduras longitudinais de flexão e o betão é importante sobretudo: (1) nas extremidades das armaduras (ou zonas de amarração) e (2) nas zonas onde o esforço transversal é máximo.

Voltando à ponte objecto de estudo, constata-se que o projectista adoptou amarrações em gancho, cuja geometria é favorável a uma amarração eficaz das armaduras. Isto significa que não existem razões para crer que uma eventual deterioração das características de aderência afecte significativamente as condições de amarração das armaduras. Relativamente ao esforço transversal, este é máximo na zona dos apoios (pilares e encontros). Na zona dos pilares, onde os momentos flectores são negativos, a aderência entre as armaduras e o betão é importante principalmente nas armaduras superiores. De acordo com as inspecções efectuadas, não há evidência de corrosão significativa nestas armaduras, pelo que a aderência entre o betão e as armaduras nestas zonas não deve constituir problema. Relativamente aos apoios nos encontros, a aderência é crítica sobretudo nas armaduras inferiores. Ora, nestas zonas, a delaminação no betão é relativamente pequena e, além disso, existe a influência favorável da compressão introduzida pelas reacções nos aparelhos de apoio, pelo que também nestas zonas não há motivos para recear que a existência de betão delaminado afecte significativamente a capacidade de carga da ponte.

O problema da diminuição da aderência associada à delaminação do betão foi estudado por Santiago *et al.* (2000). Os autores desse estudo levaram a cabo um extenso programa experimental com o objectivo de estudar o efeito da corrosão das

armaduras na vida residual de estruturas de betão armado. O estudo focalizou o efeito da corrosão na diminuição das características de aderência aço/betão (devido à delaminação e à presença dos produtos da corrosão) e na capacidade de carga, quer de elementos sujeitos a flexão (vigas), quer de elementos sujeitos a compressão (pilares). Os autores do estudo observaram uma redução na capacidade resistente e ductilidade das vigas com armaduras corroídas, mas essa redução foi devida principalmente à redução da secção de armaduras e fissuração do betão de recobrimento nas faces comprimidas, efeitos estes muito mais relevantes que a diminuição de aderência. De acordo com os resultados, observaram-se no momento da rotura níveis de aderência aço/betão significativos.

8.3.6 Síntese dos resultados da verificação preliminar da segurança

A análise efectuada permite concluir que a ponte não cumpre os critérios de segurança estipulados na regulamentação portuguesa em vigor. O estado limite crítico é a rotura por flexão na secção de meio vão do tramo central, pois foi nessa secção que se obteve o factor de capacidade de carga mais baixo — $\gamma = 0.73$. Assim, em termos muito simplificados, isto significa que, nas condições actuais, o peso máximo dos veículos autorizados a circular na ponte não deve exceder $0.73 \times 30 \sim 22$ tf, de modo a garantir uma segurança razoável face a danos graves.

No entanto, considerando que se trata de uma estrutura hiperstática, a formação de uma rótula plástica no meio vão do tramo central, embora corresponda a níveis de dano consideráveis (fendilhação significativa nessa secção), não implica o colapso imediato da estrutura, já que o colapso só ocorre quando se formam também rótulas nos apoios. Ora, como se viu, as secções dos apoios dispõem de uma reserva de segurança razoável, o que deixa antever que, se se tirar partido dessa reserva, o veículo associado ao colapso da ponte tenha peso bastante superior ao valor estimado acima. Na secção seguinte procede-se a uma análise plástica do tabuleiro, a qual permitirá tirar partido da reserva de segurança existente nos apoios.

8.4 Análise plástica

Nesta secção procede-se a uma análise plástica do tabuleiro recorrendo aos teoremas cinemático e estático da teoria da plasticidade (Zwicky, 2004). De referir que a Norma NP EN 1992-1-1 (2010) prevê este tipo de análise, especificando na secção 5.6 os princípios e as regras de aplicação a observar. O teorema cinemático estabelece que uma distribuição de esforços associada a um mecanismo cinematicamente admissível (mecanismo associado à existência de rótulas em número suficiente para levar a estrutura ao colapso) fornece um majorante da carga de colapso. O teorema estático

estabelece que uma distribuição de esforços estaticamente admissível (distribuição na qual em nenhuma secção se exceda os esforços resistentes) fornece um minorante da carga de colapso. Juntando estes dois teoremas, decorre imediatamente que a carga que, simultaneamente, transforma a estrutura num mecanismo (parcial ou global) e conduz a uma distribuição de esforços estaticamente admissível, representa a verdadeira carga de colapso.

O cenário crítico da ponte em estudo corresponde ao posicionamento de um VT a meio vão do tramo central, formando-se aí a primeira rótula plástica. No entanto, se esta secção tiver capacidade de rotação suficiente, a carga pode continuar a aumentar até que se formem também rótulas nos apoios, altura em que se dá o colapso do tabuleiro (transformação da estrutura num mecanismo, parcial no presente caso). Assim, para determinar a carga de colapso recorrendo à teoria da plasticidade é necessário verificar se a capacidade de rotação da secção de vão é compatível com a formação de rótulas plásticas nos apoios. Além disso, deve-se verificar também que, para os esforços instalados no colapso, não ocorrem outros modos de ruína (rotura por esforço transversal, por exemplo), isto é, é necessário verificar que esses esforços são estaticamente admissíveis.

8.4.1 Mecanismo de colapso

O mecanismo de colapso de interesse é o esquematizado na Figura 8.11, onde se representam, para além do veículo associado ao colapso, as cargas permanentes.

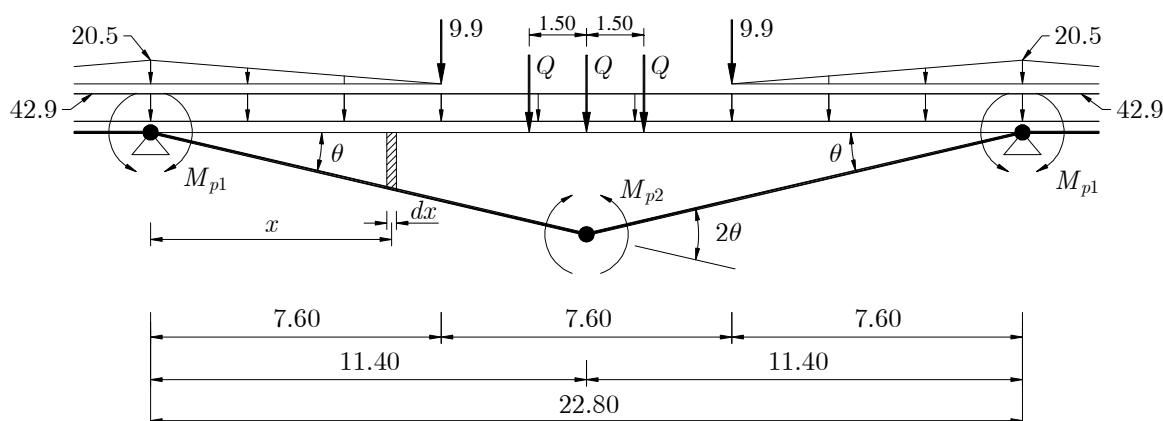


Figura 8.11: Mecanismo de colapso do tramo central da ponte.

As cargas representadas correspondem à largura de influência da viga 1 e já estão majoradas, tendo-se adoptado um factor de 1.35 para o peso próprio dos elementos estruturais e 1.50 para o peso próprio dos elementos não estruturais (restante carga permanente). Relativamente à força Q (peso transmitido por uma roda) considerou-se: $Q = 1.5 \times 50 \times \lambda$, onde o factor 1.5 representa o coeficiente de segurança, o valor

50 a força característica transmitida por uma roda e λ o factor de colapso, a determinar recorrendo ao princípio dos trabalhos virtuais.

Com o auxílio da Figura acima, facilmente se obtém o trabalho das forças exteriores, dado por $\tau_{\text{ext}} = 2340\lambda\theta + 6119.7\theta$, e o trabalho das forças interiores, dado por $\tau_{\text{int}} = 2(M_{p1} + M_{p2})\theta$, onde M_{p1} e M_{p2} representam os momentos plásticos (ou momentos resistentes) das secções de apoio e vão, respectivamente. Igualando o trabalho das forças exteriores ao trabalho das forças interiores, obtém-se a seguinte expressão para o factor de colapso:

$$\lambda = \frac{2(M_{p1} + M_{p2}) - 6119.7}{2340}. \quad (8.7)$$

Todavia, para aplicar esta expressão é necessário verificar que a secção de vão tem capacidade de rotação suficiente.

8.4.2 Verificação da capacidade de rotação da secção de vão

Visto que a curvatura de uma secção é proporcional ao ângulo θ , para a formação do mecanismo acima exige-se que a secção de vão suporte o dobro da curvatura das secções de apoio quando nestas se instala o momento plástico (ver Figura 8.11). Assim, para verificar a capacidade de rotação da secção de vão, procede-se da seguinte forma: a partir do diagrama momentos–curvatura da secção de apoio, escolhe-se uma curvatura que corresponda à instalação do momento plástico nessa secção. O momento plástico é praticamente atingido logo que as armaduras entrem em cedência. Em seguida, recorrendo ao diagrama momentos–curvatura da secção de vão, verifica-se se esta suporta o dobro daquela curvatura, isto é, verifica-se se para essa curvatura, as extensões no betão, ε_c , e no aço, ε_s , estão ainda dentro dos limites suportados por esses materiais.

Torna-se pois necessário traçar os diagramas momentos–curvatura das secções de apoio e vão. A Figura 8.12 mostra o diagrama momentos–curvatura da secção de apoio, bem como os dados necessários ao traçado desse diagrama. O diagrama foi traçado para valores da extensão no betão ε_c a variar entre 0 e 3.5‰. Para $\varepsilon_c = 3.5‰$ obteve-se $\varepsilon_s = 19‰$ que é perfeitamente suportado pelos aços correntes. Conforme se pode observar, para uma curvatura $1/R = 0.005$, o momento plástico já se encontra plenamente desenvolvido ($M_{p1} = 2990$ kNm). Para esta curvatura, as extensões no betão e no aço são de, respectivamente, 1.5‰ e 5.2‰. É necessário verificar agora se a secção de vão suporta o dobro da curvatura acima, isto é, se suporta a curvatura $1/R = 0.01$.

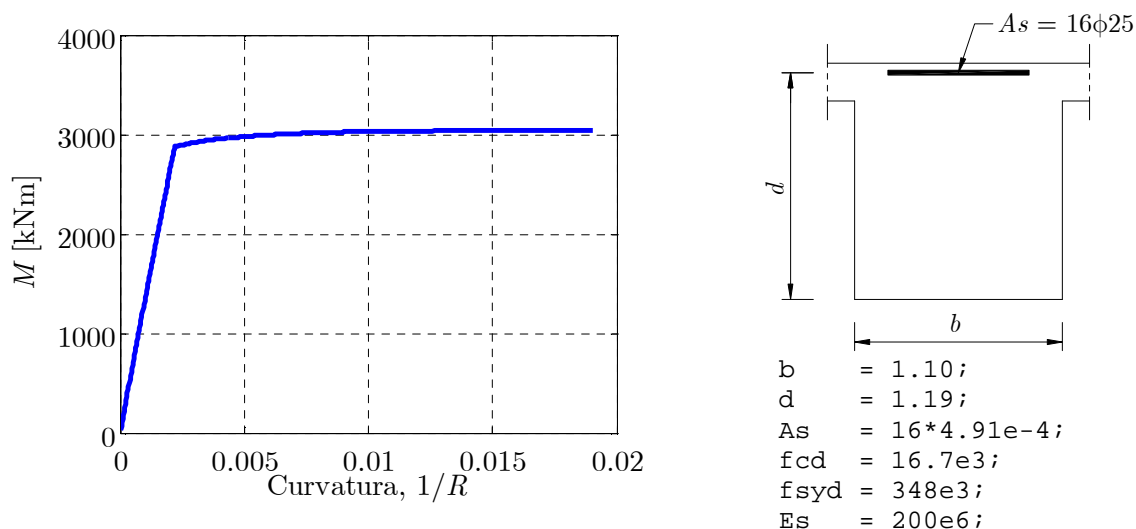


Figura 8.12: Diagrama momentos–curvatura da secção de apoio.

A Figura 8.13 mostra o diagrama momentos–curvatura da secção de vão. Conforme se pode observar, esta secção suporta perfeitamente a curvatura de 0.01. Para esta curvatura as extensões no betão e aço são de, respectivamente, 1.5‰ e 11.6‰, a que corresponde um momento resistente de $M_{p2} = 1520$ kNm. Embora se saiba que a corrosão afecta as características de ductilidade dos aços, a extensão 11.6‰ é perfeitamente admissível mesmo em aços com elevadas perdas de secção (Santiago *et al.*, 2000).

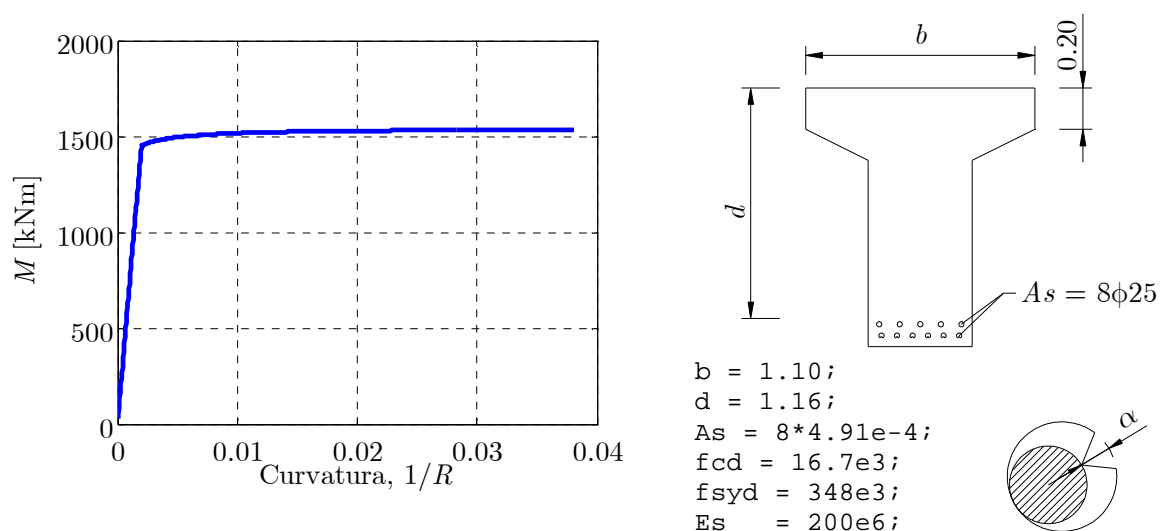


Figura 8.13: Diagrama momentos–curvatura da secção de vão.

Uma vez verificada a capacidade de rotação da secção de vão, pode-se determinar o factor de colapso recorrendo à Eq (8.7), tendo-se obtido $\lambda = 1.2$. Por se tratar de um factor superior à unidade, significa que a segurança da ponte contra o colapso está verificada, pelo menos a curto prazo. Refira-se que o diagrama momentos–

curvatura da secção de vão foi obtido considerando que a primeira camada de armadura possui uma perda de secção de 50%.

Para os momentos instalados no colapso, o esforço transversal nos apoios é de 716 kN (obtido por equilíbrio), que é bastante inferior ao esforço transversal resistente, podendo então concluir-se que a distribuição de momentos é estaticamente admissível e que a carga de colapso anteriormente estimada pode ser considerada a verdadeira carga de colapso. Refira-se também que se estimou a carga de colapso do tramo lateral (desprezando totalmente a primeira camada de armadura), tendo-se obtido $\lambda = 1.3$, que por ser superior ao factor de colapso do tramo central, não é, assim, condicionante.

Relativamente à análise efectuada, é legítimo questionar se os coeficientes de segurança empregues, que são semelhantes aos empregues quando se verificou a segurança em relação aos estados limites individuais, não deveriam ser superiores, tendo em conta o facto do colapso da ponte representar um cenário mais grave que a simples ocorrência de um único EL. De um ponto de vista estritamente regulamentar, a resposta é negativa. De facto, se o referido aumento nos coeficientes de segurança devesse ter lugar, então também se deveriam usar coeficientes de segurança superiores em estruturas isostáticas, caracterizadas por sofrerem colapso a partir do momento em que ocorre um único EL último. Como é sabido, os regulamentos não fazem em geral esta distinção.

8.4.3 Síntese dos resultados da análise plástica

A verificação preliminar da segurança permitiu atribuir à ponte um factor de capacidade de carga de 0.76, o que equivale a afirmar, em termos muito simplificados, que o peso máximo dos veículos autorizados a circular na ponte seria de $0.73 \times 30 \sim 22$ tf. A análise plástica efectuada na presente secção conduziu ao factor de colapso de 1.2, o que permitiu elevar a capacidade de carga da ponte de 22 tf para $1.2 \times 30 = 36$ tf, ou seja, mais 64% do que a anterior. Este exemplo ilustra bem a vantagem de se tirar partido de eventuais reservas de segurança que possam existir quando se avalia a segurança de uma estrutura hiperstática.

De qualquer forma, nenhuma das análises anteriores permite avaliar o risco, quer da formação de uma rótula plástica a meio vão do tramo central, quer do colapso desse tramo. Apenas informam se a segurança é satisfeita ou não. Se a segurança se encontrar satisfeita, acredita-se que o risco é pequeno, mas, em boa verdade, a magnitude do risco é desconhecida. No entanto, é possível ter uma percepção do risco de rotura recorrendo a uma análise probabilística.

8.5 Análise probabilística

A avaliação da segurança do tabuleiro recorrendo ao método dos coeficientes parciais de segurança, feita em harmonia com os critérios estipulados no RSA (1983), permitiu identificar a secção de meio vão da viga 1 do tramo central como sendo a secção crítica, tendo-se obtido o factor de capacidade de carga $\gamma = 0.73$. Por ser inferior à unidade, conclui-se que a ponte não satisfaz os critérios de segurança especificados nesse regulamento.

Pretende-se determinar agora a probabilidade de se atingir o EL último de flexão nessa secção, isto é, pretende avaliar-se a probabilidade do evento $\{M_E > M_R\}$, onde M_E representa o momento actuante (na secção de meio vão do tramo central) e M_R o momento resistente da mesma secção. O momento M_E é dado por:

$$M_E = M_{PP} + M_{RCP} + M_{SC}, \quad (8.8)$$

onde os momentos flectores M_{PP} (momento devido ao peso dos elementos estruturais), M_{RCP} (momento devido à restante carga permanente) e M_{SC} (momento devido à sobrecarga) serão modelados como variáveis aleatórias. O momento M_E , por ser função de variáveis aleatórias, é também variável aleatória. Note-se que os coeficientes de segurança desapareceram.

Os momentos actuantes acima serão avaliados recorrendo ao modelo elástico linear anteriormente descrito. Naturalmente questiona-se se é apropriado efectuar a análise com momentos elásticos, já que a análise pretendida diz respeito a uma situação última, a que correspondem níveis de fendilhação importantes, implicando alteração de rigidez e consequentemente redistribuição dos esforços elásticos. Todavia este procedimento é conservativo. Efectivamente, quando a secção de vão começa a fissurar, parte do momento M_E que nela actua começa a transferir-se para os apoios, pelo que o momento real é inferior ao momento elástico, como se esquematiza na Figura 8.14. De qualquer modo, o erro associado à determinação de M_E e a incerteza por ele gerada será considerada multiplicado esse momento por uma variável aleatória θ_E , cuja distribuição de probabilidade será discutida mais à frente.

Relativamente ao modelo para a obtenção do momento resistente M_R , irá utilizar-se o método do diagrama rectangular. Para ter em conta a incerteza neste modelo, o momento M_R será multiplicado pela variável aleatória θ_R , cuja distribuição de probabilidade será também discutida mais à frente. Assim, em resumo, a função EL de interesse é dada por:

$$Z = \theta_R M_R - \theta_E M_E, \quad (8.9)$$

e o problema consiste em avaliar a probabilidade $p_f = P(Z < 0)$.

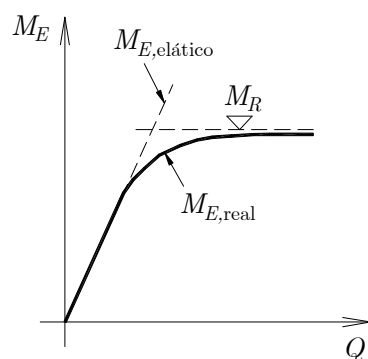


Figura 8.14: Momentos elásticos *versus* momentos reais na secção de meio vão.

A probabilidade de falha p_f será estimada para o período de um ano, por ser o prazo previsto para a substituição da ponte. Assim, relativamente à sobrecarga, interessa a distribuição de máximos anuais.

Uma hipótese importante admitida na análise tradicional relacionou-se com o estado de perda de secção das armaduras inferiores. Admitiu-se que metade da secção da primeira camada de armadura estava completamente corroída. Como é evidente, não há absoluta certeza do verdadeiro estado de perda de secção dessas armaduras. Uma das vantagens da análise probabilística reside justamente na possibilidade de ter em conta esse tipo de incerteza. A distribuição de probabilidade a atribuir a essa variável irá traduzir a incerteza que se tem a respeito do verdadeiro estado de perda de secção.

Na próxima secção apresenta-se uma descrição detalhada dos modelos probabilísticos adoptados para as variáveis básicas do problema de segurança descrito acima, após o que se procede à avaliação da probabilidade de falha. Salienta-se que a incerteza nas variáveis referentes às dimensões dos elementos estruturais pode ser considerada desprezável em comparação com a incerteza nas restantes variáveis (propriedades dos materiais e acções), o que significa que tais variáveis vão ser consideradas determinísticas.

8.5.1 Variáveis básicas e modelos de transformação

Peso próprio do betão estrutural

O peso volúmico das carotes extraídas da estrutura (Tabela 8.1) revela pouca variabilidade. De facto, para a amostra de nove carotes, o coeficiente de variação é inferior a 1%. No entanto, é preciso ter em conta que o peso específico γ_c que interessa considerar inclui o peso das armaduras, que por variarem de local para local na estrutura, faz com que a variabilidade de γ_c seja superior. Vai adoptar-se o

disposto no documento-guia dinamarquês (Vejdirektoratet, 2004), que recomenda para γ_c uma distribuição normal com média 25 kN/m^3 e coeficiente de variação 5%. Em símbolos: $\gamma_c \sim N(\mu = 25, V = 5\%)$.

Relativamente ao momento M_{PP} (momento na secção de meio vão provocado pelo peso próprio dos elementos estruturais), o modelo elástico linear descrito anteriormente conduziu a um momento de 608.2 kNm , momento este obtido considerando um peso específico de 25 kN/m^3 . Uma vez que o momento M_{PP} é uma função linear de γ_c e que as variáveis referentes às dimensões dos elementos estruturais estão a ser consideradas determinísticas, segue que a distribuição de M_{PP} é também normal, com um coeficiente de variação igualmente de 5%. A este coeficiente de variação corresponde um desvio padrão de $0.05 \times 608.2 = 30.4 \text{ kNm}$. Assim, vai adoptar-se o seguinte modelo probabilístico:

$$M_{PP} \sim N(608.2, 30.4) \text{ [kNm]}. \quad (8.10)$$

Restante carga permanente

O documento-guia dinamarquês acima referido recomenda para a restante carga permanente uma distribuição normal com um coeficiente de variação de 10%. O momento na secção de meio vão provocado pela restante carga permanente foi avaliado em 108.4 kNm , donde o modelo a adoptar para esta acção é o seguinte:

$$M_{RCP} \sim N(108.4, 10.8) \text{ [kNm]}. \quad (8.11)$$

Sobrecarga rodoviária

A análise determinística realizada anteriormente permitiu concluir que o veículo-tipo é condicionante. Pretende-se caracterizar a distribuição de probabilidade da variável $Q = \{\text{peso transmitido por cada uma das rodas dum veículo que em dado momento esteja a atravessar a ponte}\}$ (Figura 8.15). Essa distribuição de probabilidade deverá ser tal que o valor característico de Q (quantilho de 0.95) dos máximos em períodos de 50 anos seja de 50 kN , em harmonia com os critérios estipulados no RSA (1983). A variável que representa os máximos de Q em n anos será representada por Q_n . Assim, por exemplo, os máximos de Q em 50 anos será representada por Q_{50} e os máximos anuais por Q_1 .

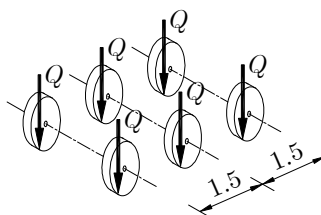


Figura 8.15: Configuração do veículo tipo.

Vai admitir-se que Q segue uma distribuição Normal, o que está de acordo com as recomendações habituais (Vejdirektoratet, 2004; BRIME, 2001b). Desta forma, a distribuição dos máximos de Q tende assintoticamente para a distribuição de Gumbel (Ang & Tang, 2007). Vai assim assumir-se que $Q_n \sim Gumb(u_n, \alpha_n)$, cuja função distribuição acumulada é dada por (Ver Anexo A):

$$F_{Q_n}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha_n(x - u_n)\right)\right). \quad (8.12)$$

A média e o desvio padrão desta distribuição são dados por:

$$\mu = u_n + \gamma / \alpha_n; \quad \sigma = \frac{\pi}{\sqrt{6} \alpha_n}, \quad (8.13)$$

onde $\gamma \cong 0.57722$, conhecida como constante de Euler. Pode demonstrar-se que se Q_n seguir uma distribuição Gumbel, o mesmo sucede à variável Q_1 . Outra propriedade desta distribuição é que o parâmetro α (que está directamente relacionado com o desvio padrão) é invariável com o período de referência n (Gumbel, 1958), isto é:

$$\alpha_1 = \alpha_n = \alpha. \quad (8.14)$$

Verifica-se também que o parâmetro u_n (que coincide com a moda dos máximos em n anos) está relacionado com u_1 (moda dos máximos anuais) por meio da expressão:

$$u_n = u_1 + (1/n) \ln n. \quad (8.15)$$

O valor característico da distribuição Gumbel (quantilho de 0.95), que se obtém invertendo a Eq. (8.12), é dado por:

$$Q_{nk} = \mu_{Q_n} \left(1 + 1.866 V_{Q_n}\right), \quad (8.16)$$

onde μ_{Q_n} e V_{Q_n} representam, respectivamente, a média e coeficiente de variação de Q_n .

Como se disse acima, vai atribui-se à variável Q_{50} uma distribuição Gumbel que conduza ao seguinte valor característico: $Q_{50k} = 50$ kN. Considerando que existem uma infinidade de distribuições com esse valor característico, para definir completamente a distribuição, é necessário especificar adicionalmente um dos seus parâmetros. O documento *Commentary on CAN/CSA-S6-00* (CAN/CSA-S6-00b, 2000) recomenda para as sobrecargas rodoviárias um coeficiente de variação de 0.035. De acordo com a página 569 desse documento, os índices de fiabilidade especificados no regulamento canadiano (CAN/CSA-S6-00, 2000) referem-se a períodos de um ano, pelo que se depreende que o coeficiente de variação acima seja aplicável à distribuição de máximos anuais. Pode parecer à partida um coeficiente de variação muito baixo, mas, atendendo a que durante um ano atravessam uma ponte vários milhares de

veículos (mesmo em pontes em itinerários com intensidade de tráfego moderada), não surpreende que os máximos anuais tenham baixa variabilidade. A variabilidade dos máximos em 50 anos é ainda menor. Refere-se ainda que os autores do projecto de investigação BRIME (2001b), baseados em estudos de tráfego real, chegaram também a coeficientes de variação (para máximos anuais) dessa ordem de grandeza.

No presente estudo vai adoptar-se para a distribuição de máximos em 50 anos um coeficiente de variação $V_{Q_{50}} = 0.05$, que, à luz dos comentários acima, pode ser considerado um valor conservativo. Assim, considerando que $Q_{50k} = 50$ kN, a Eq. (8.16) conduz a $\mu_{Q_{50}} = 45.7$ kN. Como $V_{Q_{50}} = 0.05$, segue que $\sigma_{Q_{50}} = 0.05 \times 45.7 = 2.3$ kN. A partir destes momentos e utilizando (8.13), obtêm-se os parâmetros da distribuição de Q_{50} , os quais, por sua vez, são convertidos nos parâmetros de Q_1 (Eqs. (8.14) e (8.15)). Obteve-se $u_1 = 38$ kN e $\alpha = 0.56$ kN⁻¹. Assim, o modelo probabilístico a adoptar para Q_1 é:

$$Q_1 \sim Gumb(38, 0.56) \text{ [kN]}. \quad (8.17)$$

Visto que a distribuição Gumbel admite valores negativos, interessa avaliar a probabilidade do evento $\{Q_1 < 0\}$, que deve ser baixa, já que não é fisicamente possível atravessar a ponte um veículo com peso negativo. Constata-se que a probabilidade desse evento pode ser considerada efectivamente nula.

De acordo com o modelo estrutural que se tem vindo a utilizar, o momento no meio vão do tramo central da viga 1 provocado por 3 rodas distantes entre si de 1.50m, transmitindo cada uma 50 kN, é de 506.3 kNm (Ver Tabela 8.2). Assim, atendendo a que $506.3 / 50 = 10.13$, o modelo de transformação a adoptar para os momentos provocados pela sobrecarga rodoviária é dado por:

$$M_{SC} = 10.13 Q_1. \quad (8.18)$$

Resistência do betão

Na Tabela 8.1 apresentaram-se os resultados da tensão de rotura de nove carotes extraídas da estrutura, onde 3 foram extraídas do tabuleiro, 3 do Pilar Sul e as outras 3 do Encontro Sul. Como visto anteriormente, a consideração da totalidade das carotes em vez de apenas as carotes extraídas do tabuleiro, conduz a uma resistência característica mais baixa. Apesar de alguns resultados se referirem a zonas fora do tabuleiro, é de crer que no tabuleiro possam existir zonas com resistências semelhantes. Assim, todas as carotes serão consideradas na presente análise. A média, desvio padrão e coeficiente de variação da amostra de resistências têm os seguintes valores: $\bar{f}_c = 51.2$ MPa; $s = 13.2$ MPa; $V = 0.26$. Observe-se o elevado coeficiente de variação, evidenciando que se trata de um betão significativamente heterogéneo.

Os modelos probabilísticos comumente usados na descrição da resistência do betão são o modelo Normal e o modelo Lognormal. No presente caso, e atendendo ao elevado valor do coeficiente de variação, se se optasse pelo modelo Normal, a probabilidade de existirem resistências muito baixas não seria desprezável. Julga-se, por isso, que o modelo Lognormal é mais adequado no presente caso. A Figura 8.16 compara os modelos Normal e Lognormal, ambos com média e desvio padrão iguais aos da amostra de resistências disponível.

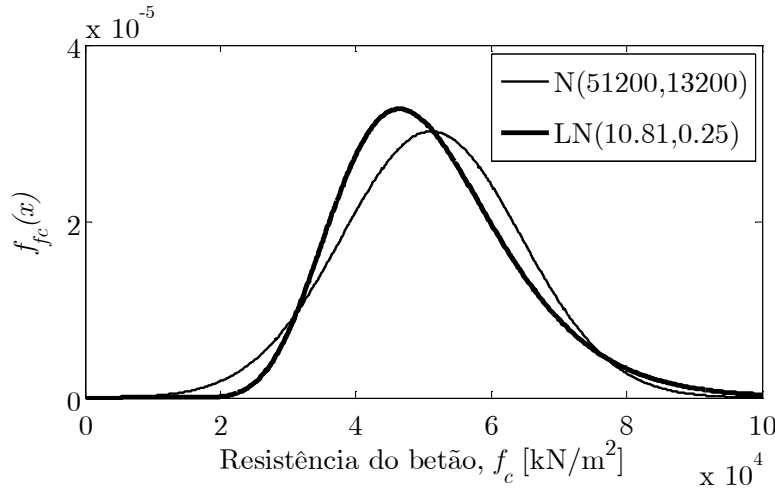


Figura 8.16: Modelos Normal e Lognormal da resistência do betão com média e desvio padrão iguais aos da amostra disponível.

Os parâmetros da distribuição Lognormal a que correspondem $\mu_{f_c} = 51.2 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ e $\sigma_{f_c} = 13.2 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ são $\mu_X = 10.81$ e $\sigma_X = 0.25$. (Ver anexo A.) Adopta-se pois o seguinte modelo:

$$f_c \sim LN(10.81, 0.25). \quad (8.19)$$

Este modelo, porém, não contempla a incerteza estatística, isto é, a incerteza decorrente do facto dos parâmetros $\mu_X = 10.81$ e $\sigma_X = 0.25$ terem sido obtidos de uma amostra finita. Assim, em linha com as recomendações do Capítulo 5, é importante avaliar o impacto desta incerteza na fiabilidade da ponte. A incerteza estatística só deve ser ignorada se o impacto for pouco significativo. Por outro lado, como se analisou no Capítulo 6, se o impacto for significativo, a abordagem Bayesiana oferece mecanismos que permitem a sua redução.

O impacto da incerteza estatística será avaliado utilizando um dos métodos descritos no Capítulo 5 e que consiste em comparar a estimativa da fiabilidade que se obtém usando o modelo (8.19) com o modelo preditivo Bayesiano da resistência do betão f_c . Este modelo obtém-se com relativa facilidade recorrendo à afinidade existente entre o modelo Normal e o modelo Lognormal. Para tal, admita-se que $f_c \sim LN$ e que se dispõe de uma amostra $f_c = \{f_{c1}, \dots, f_{cn}\}$ de resistências. Assim, a

amostra $\{x_1, \dots, x_n\} = \{\ln f_{c1}, \dots, \ln f_{cn}\}$ pertence a uma população Normal. Seja \bar{x} e s_X a média e desvio padrão dessa amostra. Admitindo que não existe informação *a priori* relevante, o modelo preditivo Bayesiano para $X = \ln f_c$ é dado por:

$$f_X(x) = St\left(x \mid \bar{x}, s_X \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, n - 1\right) = St(x \mid 10.81, 0.276, 8). \quad (8.20)$$

O modelo preditivo Bayesiano para f_c , $f_{fc}(\cdot)$, determina-se considerando que $f_c = e^X$. Tem-se $F_{f_c}(y) = P(f_c < y) = P(e^X < y) = P(X < \ln y) = F_X(\ln y)$. Aplicando derivadas a ambos os membros desta equação tem-se imediatamente:

$$f_{f_c}(y) = (1 / y) f_X(\ln y) = (1 / y) St(\ln y \mid 10.81, 0.276, 8). \quad (8.21)$$

Este é, portanto, o modelo preditivo Bayesiano da resistência do betão da ponte em estudo, que inclui apropriadamente o efeito da incerteza estatística. A Figura 8.17 compara este modelo com o modelo (8.19), que não inclui o efeito da referida incerteza.

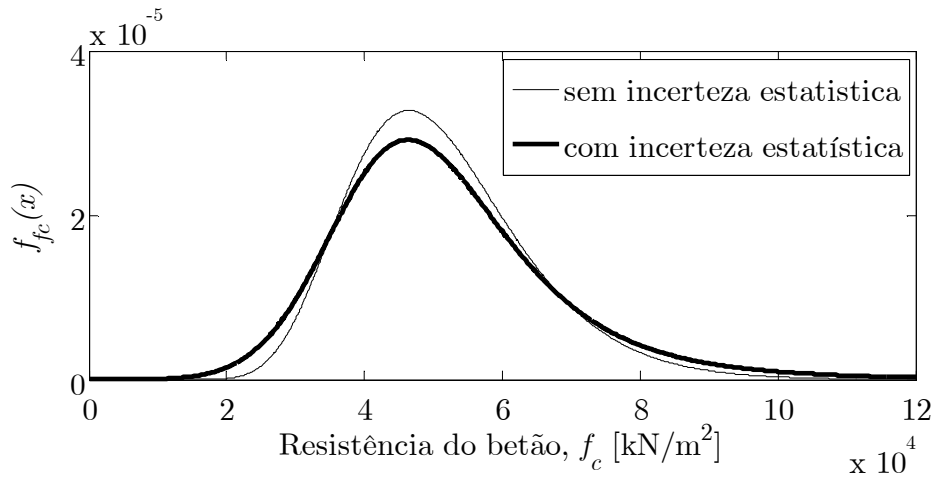


Figura 8.17: Comparação dos modelos para a resistência do betão com e sem incerteza estatística incluída.

Para efeitos de aplicação do método de MC, é conveniente apresentar os resultados acima de forma diferente. Assim, o modelo (8.20) pode ser expresso por $X = \bar{x} + s_X \sqrt{1 + 1/n} T_{n-1}$, com $T_{n-1} \sim St(0, 1, n - 1)$ e o modelo (8.21) simplesmente por $f_c = e^X$. Para gerar uma amostra preditiva Bayesiana da resistência do betão a partir da amostra $f_c = \{f_{c1}, \dots, f_{cn}\}$ procede-se da seguinte forma:

- 1) transforma-se a amostra dada na amostra $\{x_1, \dots, x_n\} = \{\ln f_{c1}, \dots, \ln f_{cn}\}$;
- 2) determina-se $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ e $s_X = \sqrt{[1/(n-1)] \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$;
- 3) gera-se $\{t_1, \dots, t_{n_s}\} \sim St(0, 1, n - 1)$, onde n_s indica a dimensão da amostra pretendida;

4) obtém-se $x_i = \bar{x} + s_X \sqrt{1 + 1/n} t_i$, $i = 1, \dots, n_s$;

5) obtém-se $f_{c_i} = e^{x_i}$, $i = 1, \dots, n_s$

Constatou-se que a fiabilidade estimada da ponte em estudo é idêntica usando qualquer um dos modelos (com ou sem incerteza estatística), concluindo-se que esta tem impacto relativamente pequeno na fiabilidade da ponte, pelo que pode ser ignorada. Na análise que segue vai usar-se o modelo (8.19).

Resistência do aço

Como já referido, o projecto da ponte em estudo especificou para as armaduras passivas aço da classe A40, endurecido e nervurado. Tratando-se de um aço endurecido, a sua resistência é caracterizada pela tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.2%, representada geralmente por $f_{s0.2}$ e considerada equivalente à tensão de cedência dos aços de dureza normal. Uma vez que não se dispõe de mais informação, o modelo probabilístico a adoptar deve estar em harmonia com as disposições regulamentares vigentes na altura do projecto e construção da ponte. O REBA (1967), que entrou em vigor cerca de um ano antes do projecto da ponte, especificava para a tensão $f_{s0.2}$ o valor característico de 40 kgf/mm², ou 400 MPa, referindo que «valores característicos são aqueles valores que são atingidos com a probabilidade de 0.95».

Vai adoptar-se o modelo proposto no *Probabilistic Model Code* (PMC) (JCSS, 2001a). Contudo, tratando-se de um código relativamente recente (comparativamente com a idade da ponte) é importante discutir a sua aplicabilidade ao problema. O PMC propõe para a tensão de cedência f_{sy} um desvio padrão de 30 MPa, que, segundo o mesmo documento, pode ser decomposto em 3 fontes de variabilidade independentes: (1) variabilidade entre diferentes produtores ($\sigma = 19$ MPa); (2) variabilidade entre vazamentos, mas do mesmo produtor ($\sigma = 22$ MPa) e (3) variabilidade dentro de um mesmo vazamento ($\sigma = 8$ MPa). Assim, por exemplo, no caso de uma ponte com um único fornecedor de aço o desvio padrão a considerar seria de $\sqrt{22^2 + 8^2} = 23$ MPa, que é cerca de 23% mais baixo que o desvio padrão de uma população que envolva vários produtores de aço. É de esperar que o aço da ponte em questão tenha sido fornecido por um único fornecedor, pelo que a adopção de um desvio padrão de 30 MPa pode ser encarado, sob este ponto de vista, como valor conservativo.

Relativamente à média μ da tensão de cedência, o mesmo documento propõe $\mu = f_{nom} + 2\sigma$, onde f_{nom} refere-se à tensão nominal, em geral identificada com o valor característico. Assim, para o aço da classe A40, tem-se: $\mu = 400 + 2 \times 30 = 460$ MPa. Por conseguinte, o modelo proposto pelo *Probabilistic*

Model Code (JCSS, 2001a) conduz a uma tensão característica de $460 - 1.645 \times 30 = 411$ MPa, que é apenas 2.7% superior ao valor nominal e parece perfeitamente razoável. Aliás, é bem conhecido que, por razões de salvaguarda, as firmas produtoras de aço tendem a interpretar os valores nominais como valores mínimos garantidos (e não como valores característicos), observação esta que se harmoniza com os resultados reportados por Pipa (1995).

O coeficiente de variação implícito no modelo acima é de $30 / 460 = 0.065$. Deve-se referir que têm sido reportados coeficientes de variação da ordem de 10% (Wisniewski, 2007), mas estes sempre se referem a populações envolvendo vários produtores. Crê-se, portanto, que o desvio padrão de 30 MPa ajusta-se perfeitamente ao aço da ponte em estudo, pese embora se trate de um aço produzido há cerca de 40 anos. Neste respeito, como se disse anteriormente, é interessante notar que o REBA (1967) indicava um coeficiente de segurança a aplicar à tensão de cedência de 1.15, exactamente o mesmo que é hoje preconizado na regulamentação europeia, o que sugere que a confiança que se tinha nos aços da altura é sensivelmente idêntica à confiança que se tem nos aços produzidos actualmente.

Face ao exposto, adopta-se o seguinte modelo probabilístico para a resistência do aço:

$$f_{s0.2} \sim N(460, 30) \text{ [MPa]}. \quad (8.22)$$

Área das armaduras

A variabilidade da resistência do aço inclui a variabilidade da área das armaduras. Isto decorre do facto das tensões nos aços serem em geral obtidas dividindo as forças medidas nos ensaios de tracção pelas áreas nominais, e não pelas áreas reais. Assim, não há que considerar incerteza nas áreas das armaduras, excepto, naturalmente, a que decorre do desconhecimento do verdadeiro estado de perda de secção devido à corrosão.

A armadura da secção em análise (meio vão da viga 1 do tramo central) é constituída por duas camadas de armadura, a primeira com $6\phi 25$ e a segunda com $5\phi 25$ (Figura 8.18). A primeira camada será considerada com perda de secção e a segunda será considerada intacta. Com o objectivo de modelar o estado de perda de secção da primeira camada, introduz-se a variável i_c , designada aqui por índice de corrosão e definida como o factor pelo qual se deve multiplicar a área de armadura $sã$ a fim de obter a área de armadura residual, isto é, $i_c = A_{res} / A_{sã}$. O índice de corrosão i_c está pois compreendido entre 0 e 1, sendo que o valor 0 corresponde a perda total de secção e o valor 1 corresponde a secção intacta.

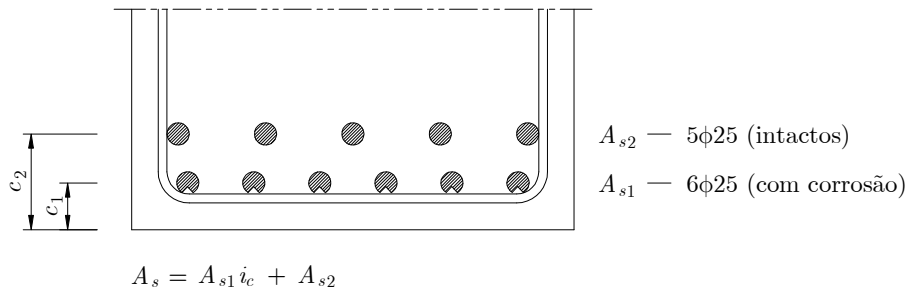


Figura 8.18: Armaduras da secção de meio vão do tramo central (viga 1).

Uma vez que a área residual de armadura é desconhecida, a variável $X = i_c$ vai ser modelada como variável aleatória, o que se harmoniza com a interpretação Bayesiana de probabilidade. Tratando-se de uma variável com limites bem definidos (neste caso 0 e 1), julgou-se adequado atribuir-lhe uma distribuição beta, cuja FDP é dada por $f_X(x | \alpha, \beta) = c \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$, com $0 < x < 1$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. A constante c é a constante de normalização (ver Anexo A).

Como se vai ver, a fiabilidade da ponte apresenta uma sensibilidade significativa em relação ao índice de corrosão, pelo que haverá toda a conveniência em modelar este parâmetro da forma mais precisa possível. Vai adoptar-se a abordagem Bayesiana, o que permitirá incorporar no modelo qualquer informação relevante que venha a ser colhida da ponte. Assim, os parâmetros α e β vão ser modelados como variáveis aleatórias, o que dará ao modelo uma apreciável flexibilidade. Uma vez que neste momento pouco se sabe a respeito desses parâmetros, vai admitir-se que têm distribuição uniforme no intervalo $[1, 8]$, o que garante à partida todas as formas que é razoável esperar para a distribuição do índice de corrosão. A título de exemplo, mostra-se na Figura 8.19 algumas das formas que é possível obter com esse conjunto de parâmetros. A traço grosso representam-se as distribuições $f_X(x | 1, 4)$, $f_X(x | 4, 4)$ e $f_X(x | 4, 1)$.

A Figura 8.20 mostra o histograma preditivo Bayesiano do índice de corrosão que se obtém considerando que *a priori* α e β são independentes e com distribuição uniforme no intervalo $[1, 8]$. Uma vez que a própria distribuição Beta é bastante flexível, é possível determinar os parâmetros duma distribuição Beta que se ajuste razoavelmente bem a esse histograma. Na Figura 8.20 mostra-se a FDP da distribuição Beta com parâmetros determinados a partir da amostra acima recorrendo ao método da máxima verosimilhança. Os parâmetros de máxima verosimilhança são $\alpha = \beta = 1.75$. Observe-se que a média dessa distribuição é de 0.5, o que está em harmonia com a análise determinística feita anteriormente, onde se considerou uma perda de secção de 50% da primeira camada de armadura.

Assim, no que segue, vai adoptar-se para i_c o seguinte modelo:

$$i_c \sim \text{Beta}(1.75, 1.75). \quad (8.23)$$

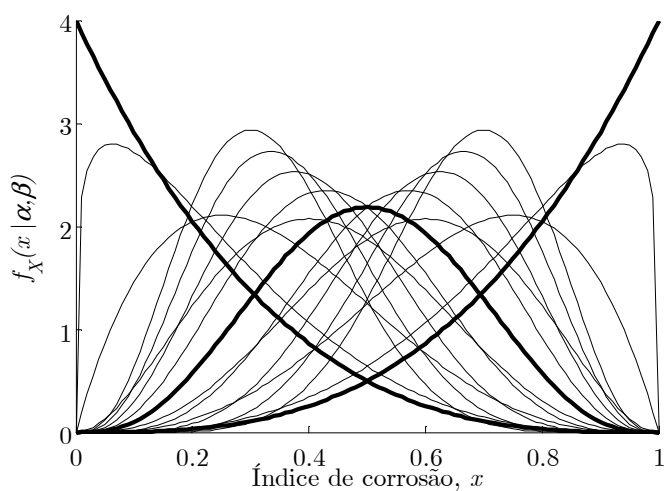


Figura 8.19: Algumas das formas que é possível obter para a FDP do índice de corrosão $X = i_c$ com α e β a variar no intervalo $[1, 8]$.

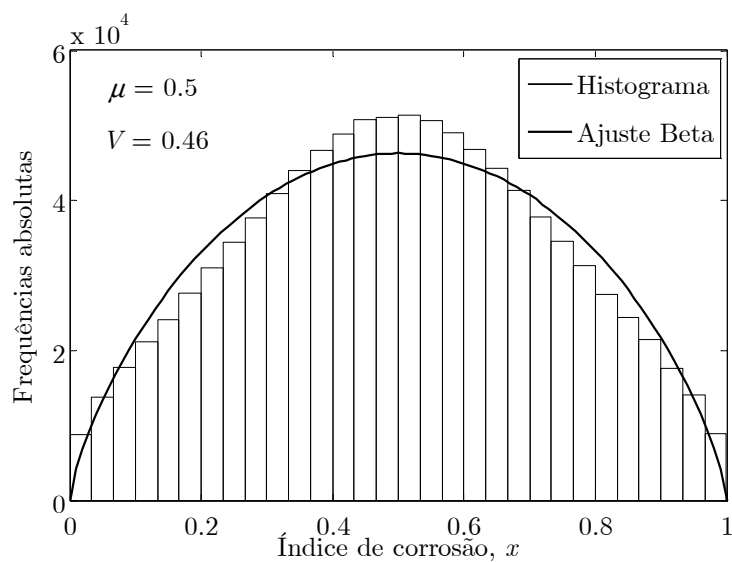


Figura 8.20: Histograma preditivo do índice de corrosão $X = i_c$ considerando que α e β são independentes e uniformemente distribuídos no intervalo $[1, 8]$.

Cotas das armaduras

Visto que não há certeza absoluta da verdadeira posição das armaduras, as cotas c_1 e c_2 (ver Figura 8.18) vão ser modeladas como variáveis aleatórias. Vão considerar-se as seguintes distribuições:

$$c_1 \sim Unif(0.04, 0.06) \text{ [m]}. \quad (8.24)$$

$$c_2 \sim Unif(0.09, 0.13) \text{ [m]}. \quad (8.25)$$

Os modelos acima basearam-se nas seguintes tolerâncias no posicionamento das armaduras: $c_1 = 0.05 \pm 0.01$ e $c_2 = 0.11 \pm 0.02$.

Incerteza nos modelos de transformação

Na avaliação da função estado limite $Z = \theta_R M_R - \theta_E M_E$ intervêm dois tipos de modelos de transformação: um que permite obter o momento actuante M_E e outro que permite obter o momento resistente M_R . O primeiro transforma acções (e outras variáveis básicas) em efeitos de acções — é chamado modelo estrutural. O segundo transforma variáveis básicas (propriedades dos materiais e parâmetros geométricos) em esforços resistentes — é chamado modelo de resistência. A incerteza nestes modelos é modelada pelas variáveis básicas θ_E e θ_R . Estas variáveis serão modeladas com distribuições Lognormais, em harmonia com a recomendação do *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a).

Ao especificar os parâmetros das distribuições de θ_E e θ_R é importante ter presente o seu significado. Por exemplo, a média de θ_E constitui uma medida da exactidão do modelo estrutural e o desvio padrão uma medida da sua precisão, e o mesmo sucede com a variável θ_R . A exactidão do modelo diz respeito à sua capacidade em efectuar predições próximas dos valores reais e a precisão diz respeito à sua capacidade em efectuar predições com pouca dispersão entre si. A dispersão entre sucessivas predições pode ser o reflexo de existirem outras variáveis que afectam a resposta do modelo e que não estão a ser contabilizadas, ou pode reflectir simplesmente o estado de desconhecimento (ou incerteza) a respeito da adequabilidade do modelo.

Relativamente ao modelo estrutural convém ter presente os três tipos de condições que intervêm nesse modelo: (1) condições de equilíbrio, (2) relações constitutivas e (3) condições fronteira. Relativamente às primeiras, pode-se afirmar com confiança que se encontram satisfeitas. Relativamente às segundas, recorde-se que o modelo estrutural adoptado pressupõe comportamento elástico perfeito para os materiais, hipótese que se afasta bastante da realidade, sobretudo quando estão envolvidas acções de valor apreciável, como é o caso da análise aos EL últimos. Ora, uma vez que a primeira secção a apresentar comportamento não linear é a secção de meio vão (por se tratar

da secção crítica) os momentos calculados nessa secção tenderão a ser superiores aos momentos reais, devido à transferência de momentos dessa secção para os apoios. Assim, deste ponto de vista, o modelo estrutural deve ser considerado como conservativo, o que implicaria uma média para θ_E inferior à unidade. Relativamente às condições fronteira, uma fonte de incerteza seria por exemplo a possibilidade de ocorrência de assentamentos nas fundações, não contabilizados no modelo que admite apoios rígidos na direcção vertical. Mas esta hipótese julga-se satisfeita com um grau razoável de certeza, atendendo ao tipo de fundações da estrutura (fundações indirectas por estacaria). Estas considerações mostram que a incerteza no modelo estrutural não é significativa.

Quando se utilizam modelos de barra, como é o caso presente, o *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001a) recomenda para θ_E uma média de 1.0 e um coeficiente de variação de 0.10. Julga-se que se trata de um coeficiente de variação excessivo. O documento-guia Dinamarquês (Vejdirektoratet, 2004) recomenda $V = 0.04$ para modelos estruturais com boa precisão, $V = 0.06$ para modelos com precisão normal e $V = 0.09$ para modelos de baixa precisão. No presente estudo vai adoptar-se $V = 0.05$, que se julga perfeitamente ajustado. Em resumo, adopta-se o modelo:

$$\theta_E \sim LN(\mu_{\theta_E} = 1.0, V_{\theta_E} = 0.05). \quad (8.26)$$

Relativamente à variável θ_R , refira-se que os momentos resistentes vão ser avaliados recorrendo ao método do diagrama rectangular e admitindo as hipóteses usuais: (1) diagrama parábola-rectângulo para o betão, com extensão limite de 3.5‰; (2) diagrama elasto-plástico para o aço, sem extensão limite; (3) secções planas na rotura e (4) aderência perfeita entre as armaduras e o betão. É bem sabido que estas hipóteses conduzem a resultados satisfatórios. Efectivamente, ensaios laboratoriais de vigas têm comprovado que esses modelos predizem com razoável exactidão a capacidade resistente à flexão desses elementos.

O PMC (JCSS, 2001a) recomenda o modelo $\theta_R \sim LN(\mu_{\theta_R} = 1.2, V_{\theta_R} = 0.15)$. Os parâmetros deste modelo (média e coeficiente de variação) afiguram-se desajustados em face dos comentários acima. No presente estudo, vai adoptar-se um modelo idêntico ao adoptado para a variável θ_E , que se harmoniza com as recomendações que se encontram em Melchers (1999):

$$\theta_R \sim LN(\mu_{\theta_R} = 1.0, V_{\theta_R} = 0.05). \quad (8.27)$$

A Tabela 8.4 resume os modelos probabilísticos acabados de descrever para cada uma das variáveis básicas.

Tabela 8.4: Distribuições de probabilidade das variáveis básicas.

Variável		Un.	Distribuição	Parâmetros		Obs
Designação	Abrev.					
Momento devido ao PP	M_{PP}	kNm	Normal	$\mu = 608.2$	$\sigma = 30.4$	
Momento devido à RCP	M_{RCP}	kNm	Normal	$\mu = 108.4$	$\sigma = 10.8$	
Peso transmitido por uma roda do VT	Q_1	kN	Gumbel	$u = 38.0$	$a = 0.56$	(1)
Resistência do betão	f_c	kN/m ²	Lognormal	$a = 10.81$	$b = 0.25$	
Resistência do aço	$f_{s0.2}$	kN/m ²	Normal	$\mu = 460e3$	$\sigma = 30e3$	
Índice de corrosão	i_c	-	Beta	$\alpha = 1.75$	$\beta = 1.75$	
Cota da 1. ^a camada de armadura	c_1	m	Uniforme	$a = 0.04$	$b = 0.06$	
Cota da 2. ^a camada de armadura	c_2	m	Uniforme	$a = 0.09$	$b = 0.13$	
Incerteza do modelo estrutural	θ_E	-	Lognormal	$\mu = 1.0$	$V = 0.05$	(2)
Incerteza do modelo de resistência	θ_R	-	Lognormal	$\mu = 1.0$	$V = 0.05$	(2)

(1) Distribuição de máximos anuais.

(2) A média e coeficiente de variação apresentados referem-se à própria variável e não à variável Normal subjacente.

8.5.2 Avaliação da probabilidade de falha

Uma vez especificados os modelos probabilísticos de cada variável básica, pode avaliar-se a probabilidade $p_f = P(Z < 0)$, em que Z representa a margem de segurança associada à função estado limite em apreço: $Z = \theta_R M_R - \theta_E M_E$. O problema foi avaliado quer pelo método de Monte Carlo (MC) quer pelo método FORM, tendo-se, para o efeito, desenvolvido rotinas MATLAB, cujas listagens constituem o Anexo C (rotinas mcarlo.m e form.m).

O método FORM, além de exigir menos esforço computacional que o método MC, permite com relativa facilidade efectuar uma análise de sensibilidade, muito importante em problemas de fiabilidade. No entanto, como referido no Capítulo 2, o método FORM é um método aproximado, e não havendo absoluta garantia que o ponto de dimensionamento tenha sido encontrado, é boa prática analisar o problema também com MC, cujos resultados servirão para validar o ponto de dimensionamento encontrado pelo método FORM. Relativamente ao método de MC, e tendo em conta que são necessários apenas alguns segundos para simular a função estado limite em apreço vários milhões de vezes (o que garante uma precisão aceitável), não se justificou implementar qualquer técnica de redução da variância, como as descritas no capítulo 2.

O método de MC forneceu $\beta = 3.04$ e o método FORM $\beta = 2.96$. Há assim entre um método e outro uma diferença de cerca de 2.6%, que se atribui ao facto do

método FORM ser aproximado. Visto que o método de MC pode ser considerado exacto, considera-se que a estimativa $\beta = 3.04$ é a correcta. É necessário agora comparar este índice de fiabilidade com a fiabilidade-objectivo. A única recomendação oficial europeia quanto a níveis de fiabilidade é a que consta na Norma NP EN 1990 (2009), que recomenda $\beta = 3.8$ para a vida útil de projecto (50 anos). Considerando que a vida residual da estrutura em avaliação é de 1 ano, a fiabilidade a requerer para a estrutura é de 3.8, superior, portanto, à fiabilidade estimada. A ponte não satisfaz assim este critério. Refira-se, no entanto, que a fiabilidade estimada é considerada aceitável nos EUA (ver capítulo 3).

Na Figura 8.21 mostram-se os histogramas dos momentos actuante, M_E , e resistente, M_R , obtidos com o método de MC.

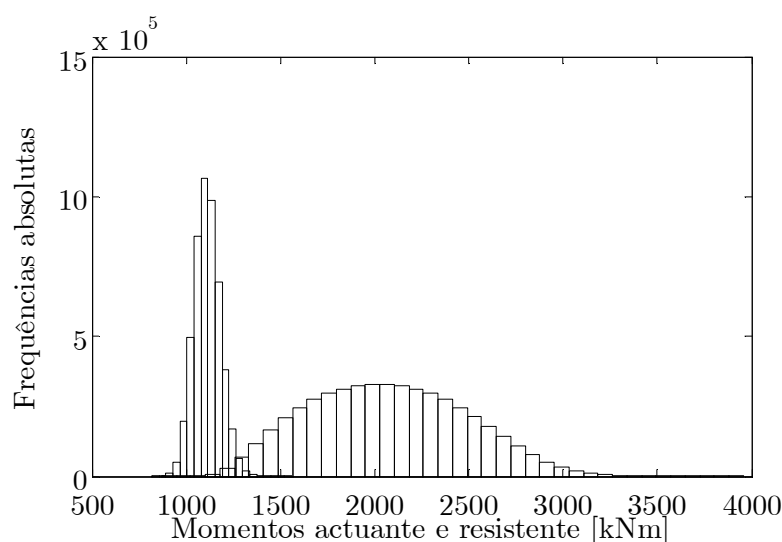


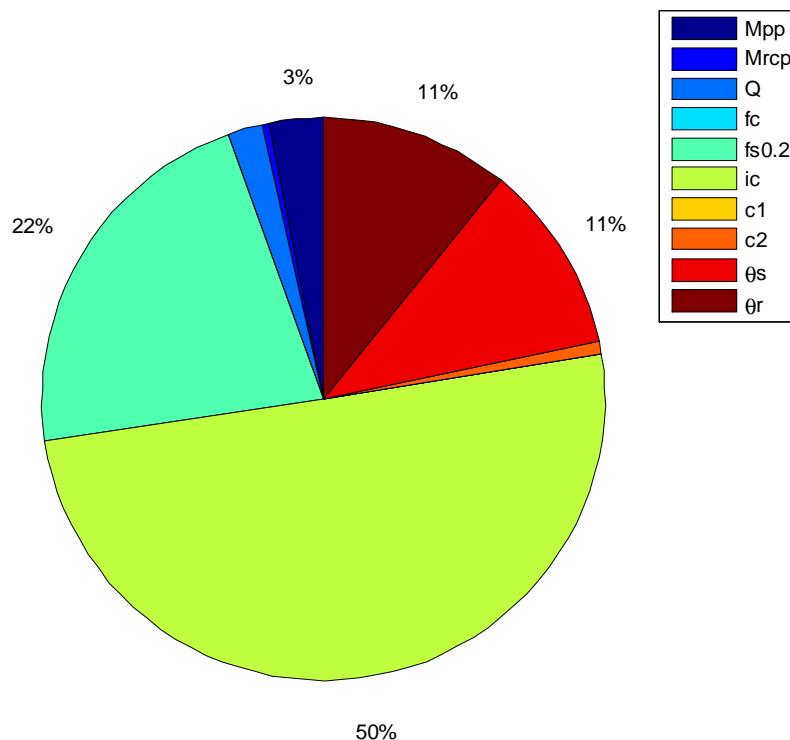
Figura 8.21: Histogramas dos momentos actuante e resistente, obtidos com o método de MC (um milhão de simulações).

Uma análise probabilística deve ser sempre acompanhada por uma análise de sensibilidade. Se o problema de fiabilidade for muito sensível a algumas das variáveis, convém analisar a razão para tal sensibilidade (Ditlevsen & Madsen, 2005). Na Tabela 8.5 mostram-se os coeficientes de sensibilidade α obtidos pelo método FORM. O coeficiente de sensibilidade mede a contribuição e importância que cada variável tem no índice de fiabilidade estimado. As variáveis com elevado coeficiente de sensibilidade são aquelas para as quais se verificam simultaneamente as seguintes condições: (1) possuem elevado coeficiente de variação e (2) uma pequena variação na variável produz uma variação significativa na margem de segurança. Isto significa que, se se desejar uma melhor estimativa do índice de fiabilidade, as variáveis a privilegiar para efeitos de melhor caracterização das respectivas distribuições são aquelas com maior coeficiente de sensibilidade.

Tabela 8.5: Coeficientes de sensibilidade FORM.

Variável		α	α^2
Designação	Abrev.		
Momento devido ao PP	M_{PP}	0.18	0.03
Momento devido à RCP	M_{RCP}	0.06	0.004
Peso transmitido por uma roda do VT	Q_1	0.14	0.02
Resistência do betão	f_c	-0.02	0.0002
Resistência do aço	$f_{s0.2}$	-0.47	0.22
Índice de corrosão	i_c	-0.71	0.50
Cota da 1. ^a camada de armadura	c_1	0.00	0.00001
Cota da 2. ^a camada de armadura	c_2	0.08	0.01
Incerteza do modelo estrutural	θ_E	0.33	0.11
Incerteza do modelo de resistência	θ_R	-0.33	0.11
Σ			1.00

Observe-se que a variável índice de corrosão i_c é a que possui maior coeficiente de sensibilidade, seguindo-se-lhe a resistência do aço $f_{s0.2}$ e as variáveis θ_E e θ_R , que modelam as incertezas nos modelos de transformação. A Figura 8.22 mostra o diagrama circular dos quadrados dos coeficientes de sensibilidade, cuja soma, como se sabe, tem de ser igual à unidade.

**Figura 8.22:** Quadrado dos coeficientes de sensibilidade FORM.

Observe-se também o baixo coeficiente de sensibilidade da resistência do betão. Assim, apesar de se tratar de uma variável com coeficiente de variação apreciável, estes resultados mostram que não se justifica proceder à realização de novos ensaios. Se esse não fosse o caso, poder-se-ia proceder a um levantamento do tabuleiro com algum ensaio indirecto e empregar a metodologia proposta no Capítulo 7 desta dissertação.

O facto do índice de corrosão ser uma variável com apreciável coeficiente de sensibilidade, não constitui surpresa, não só porque o índice de corrosão afecta a área das armaduras (variável importante para o momento resistente), mas também porque existe razoável incerteza a respeito da área residual das armaduras (ver Figura 8.20). Justifica-se pois uma tentativa de melhor caracterização do índice de corrosão. Tal será possível colhendo informação adicional a respeito desta variável e, recorrendo às metodologias Bayesianas, usar essa informação para actualizar a sua distribuição de probabilidade.

8.6 Actualização Bayesiana do índice de corrosão

8.6.1 Recolha de informação relativa às áreas residuais das armaduras

O índice de corrosão i_c (usado para quantificar a área residual das armaduras) é a variável com maior impacto na fiabilidade estimada da ponte, tendo-se obtido para essa variável $\alpha = 0.71$. Isto significa que há toda a conveniência em procurar informação adicional a fim de obter uma quantificação mais realista da incerteza nesta variável. Com o objectivo de melhor caracterizar o estado de perda de secção das armaduras na secção em estudo (meio vão do tramo central da viga 1), procedeu-se a uma campanha de medição de diâmetros de armaduras, que se descreve de seguida. Por dificuldade de acesso à secção de meio vão do tramo central e ainda pela conveniência em não introduzir qualquer dano nesta secção (por ser a secção crítica), seleccionaram-se diferentes zonas do tabuleiro junto ao encontro Sul, cujo estado foi considerado como representativo do estado da zona de interesse, que se representa na Figura 8.23.

Em primeiro lugar, constata-se que na secção de interesse, o betão de recobrimento ainda não se encontra destacado, com excepção da zona do canto interior. Assim, começou por seleccionar-se uma zona da viga junto ao encontro Sul com betão ainda não delaminado, tendo-se aberto uma pequena janela a fim de por a descoberto as armaduras e, desta forma, observar o seu estado real. A Figura 8.24 mostra a abertura dessa janela, a qual foi depois devidamente selada. Conforme se pode observar, as armaduras transversais e longitudinais são do tipo nervurado. Com

auxílio de um paquímetro, constatou-se que o estribo tem 10 mm de diâmetro, estando por isso intacto, o mesmo sucedendo com a armadura longitudinal. Esta observação permite assim concluir que em zonas da estrutura em que o betão não se encontra destacado, é elevada a probabilidade de que as armaduras não tenham perda de secção significativa.

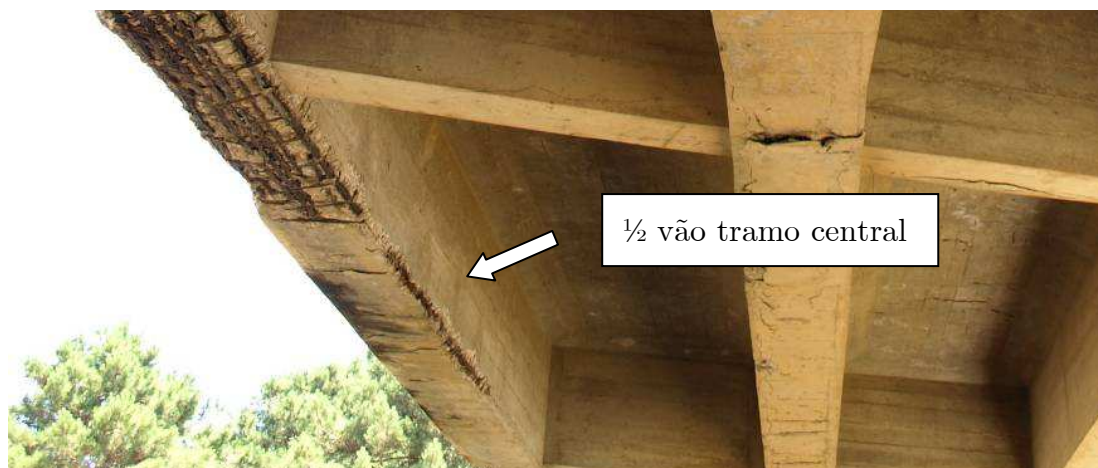


Figura 8.23: Estado da secção de interesse — meio vão do tramo central da viga 1.



Abertura da janela



Janela após selagem



Estribo e vão longitudinal postos a descoberto.

Figura 8.24: Janela para inspeção do estado das armaduras.

Na próxima medição escolheu-se um varão numa zona com betão delaminado. A Figura 8.25 mostra a leitura do diâmetro desse varão. A princípio o varão parecia que tinha uma perda de secção considerável, mas após limpeza com escova de aço constatou-se que o diâmetro ainda era de 25 mm, não tendo assim ocorrido nenhuma perda de secção. Na fotografia é possível observar a nervura em hélice do varão, o que mostra que se trata de armadura endurecida por torção. Esta observação mostra que é possível encontrar armaduras à vista sem perda de secção significativa.

Mediu-se ainda o diâmetro de uma armadura de canto extremamente corroída (Figura 8.26), tendo-se obtido um valor de 17 mm. Por fim, mediu-se o diâmetro de uma armadura num canto com betão destacado, num estado semelhante ao da secção de interesse (Figura 8.23). Escolheu-se uma zona da viga 3 junto ao encontro Sul, que se apresenta na Figura 8.27. Observe-se o brilho do varão após a passagem com rebarbadora. O diâmetro medido foi de 18 mm.



Figura 8.25: Medição do diâmetro de uma armadura longitudinal exposta.



Figura 8.26: Medição do diâmetro de uma armadura de canto (valor lido = 17 mm).



Aspecto do varão antes da passagem com escova de aço e rebarbadora



Medição do diâmetro com paquímetro.

Figura 8.27: Medição do diâmetro num canto com betão destacado.

Em resumo, foram medidos 4 diâmetros, a saber, 25, 25, 17 e 18 mm. Qualquer um destes diâmetros residuais é susceptível de representar o verdadeiro diâmetro das armaduras da secção de interesse, que se desconhece. Recorde-se que o índice de corrosão i_c foi definido como a razão entre a área residual e a área da armadura sã, isto é $i_c = A_{res} / A_{sã} = (\pi \phi_{res}^2 / 4) / (\pi \phi^2 / 4) = (\phi_{res} / \phi)^2$. Assim, a amostra acima de diâmetros residuais lidos é convertida na seguinte amostra de valores do índice de corrosão i_c : $\varepsilon = \{1.00, 1.00, 0.46, 0.52\}$. Uma vez que o valor extremo $i_c = 1$ não faz parte do domínio da distribuição Beta, substituiu-se os valores 1.00 da amostra acima por 0.99.

Importa agora saber como usar esta amostra para actualizar a distribuição de probabilidade da variável i_c , assunto a tratar na próxima subsecção.

8.6.2 Modelo preditivo actualizado do índice de corrosão

Para obter via método de MC uma amostra preditiva *a posteriori* (ou actualizada) do índice de corrosão vai empregar-se o algoritmo proposto no capítulo 4 desta dissertação, tendo-se para o efeito desenvolvido uma rotina em MATLAB, cuja listagem se apresenta no Anexo C (rotina `post_predictive.m`). Recorde-se que para obter uma amostra preditiva *a posteriori* é necessário em primeiro lugar gerar uma amostra da distribuição *a posteriori* dos parâmetros α e β , definida por $f(\alpha, \beta | \varepsilon) \propto L(\alpha, \beta | \varepsilon)f(\alpha, \beta)$, onde $L(\alpha, \beta | \varepsilon)$ representa a função verosimilhança da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ de índices de corrosão. Essa amostra será obtida recorrendo ao método da aceitação-rejeição e a amostra do modelo preditivo *a posteriori* $f(x | \varepsilon) = \iint f_X(x | \alpha, \beta)f(\alpha, \beta | \varepsilon)$, será obtida empregando o método da composição.

A função verosimilhança $L(\alpha, \beta | \varepsilon)$ é dada por:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta | \varepsilon) &= \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} = \\ &= \frac{1}{[B(\alpha, \beta)]^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\alpha-1} \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i) \right)^{\beta-1}, \end{aligned} \quad (8.28)$$

A Figura 8.28 mostra os histogramas preditivos do índice de corrosão, *a priori* e *a posteriori*. Conforme se constata, a observação da amostra $\varepsilon = \{0.99, 0.99, 0.46, 0.52\}$ de índices de corrosão fez deslocar para a direita uma boa parte da massa probabilística da distribuição *a priori*. Verifica-se assim uma alteração substancial das expectativas que se tinha inicialmente: a média *a posteriori* do índice de corrosão é de 0.74 e o desvio padrão é de 0.20, a que corresponde um coeficiente de variação de 0.27.

Estes novos dados serão usados para actualizar a fiabilidade da ponte em estudo. Para esse efeito, o índice de corrosão actualizado será modelado com uma distribuição Beta cujos parâmetros vão ser estimados a partir da amostra preditiva *a posteriori* recorrendo ao método da máxima verosimilhança. Obteve-se $\hat{\alpha} = 2.89$ e $\hat{\beta} = 1.05$, conduzindo à FDP que se representa na Figura 8.28 (b) em conjunto com o histograma. A distribuição actualizada do índice de corrosão é pois $i_c | \varepsilon \sim \text{Beta}(2.89, 1.05)$.

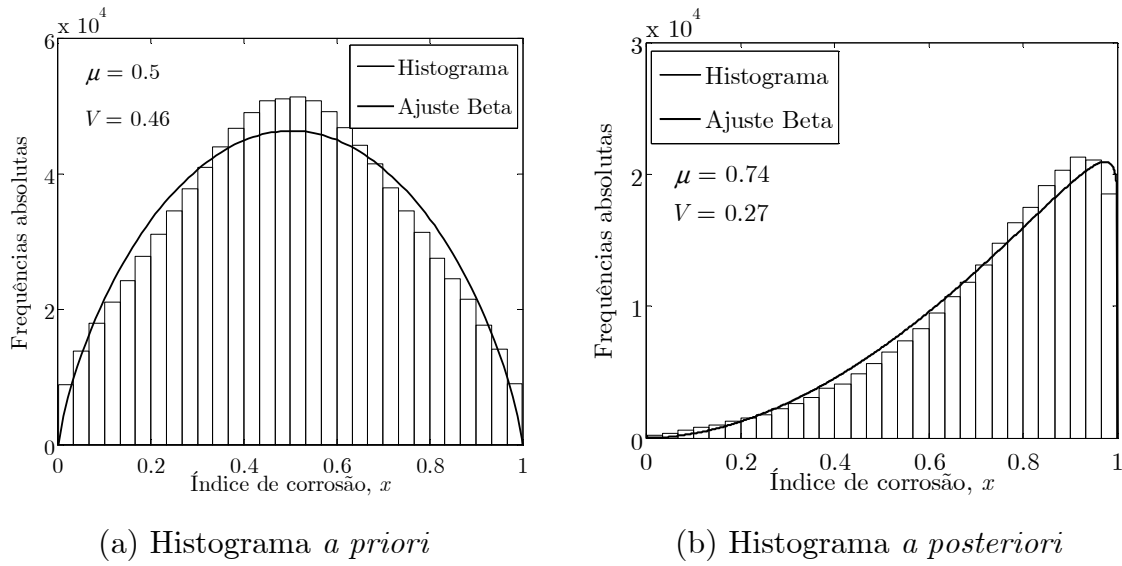


Figura 8.28: Histograma preditivo do índice de corrosão. Os parâmetros μ e V indicados são a média e o coeficiente de variação da amostra gerada.

8.6.3 Actualização da fiabilidade

O conhecimento da nova distribuição do índice de corrosão permite actualizar a fiabilidade da ponte. Obteve-se $\beta = 3.90$, o que representa um aumento de 28% em relação à estimativa inicial. Este exemplo, ilustra bem como a estimativa da fiabilidade de uma ponte pode aumentar significativamente quando se usam informações recolhidas da ponte. Verifica-se assim que a fiabilidade estimada considerando a nova informação é superior ao mínimo requerido para a ponte ($\beta = 3.8$).

A Figura 8.29 mostra os histogramas dos momentos actuante e resistente obtidos com o método de MC. Observe-se a mudança na forma do histograma do momento resistente, quando comparado com a obtida anteriormente (ver Figura 8.21), reflectindo a mudança na forma da FDP do índice de corrosão.

Uma vez formulado o problema e estimada a fiabilidade da ponte, torna-se bastante simples estimar quaisquer outras probabilidades de interesse. Por exemplo, suponha-se que, relativamente ao caso de estudo apresentado, se deseja avaliar a probabilidade da ponte sofrer danos graves se passar por ela um veículo com peso de 20 tf. Neste caso, a variável Q do problema (peso de uma roda) passa a ser determinística, com valor $Q = 200 / 6 = 33.3$ kN. Obteve-se $p_f = 9.8 \times 10^{-6}$ ($\beta = 4.27$). Avalie-se agora a probabilidade da ponte sofrer danos graves à passagem de um veículo de 35 tf. Obteve-se $p_f = 1.2 \times 10^{-3}$ ($\beta = 3.04$). Seria assim possível construir o gráfico $p_f = p_f(Q)$. Observe-se que a análise probabilística não informa

qual o peso do veículo que provoca danos graves na ponta, mas a probabilidade da ponte sofrer danos graves à passagem de um veículo com determinadas características.

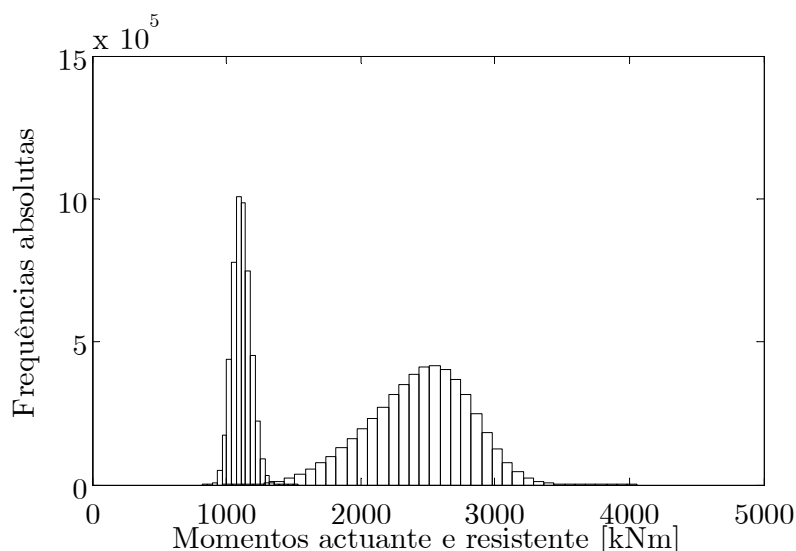


Figura 8.29: Histogramas dos momentos actuante e resistente, obtidos com o método de MC (um milhão de simulações).

8.6.4 Considerações adicionais a respeito do modelo Bayesiano

Como ficou bem evidenciado nas sub-seções anteriores, a abordagem Bayesiana oferece um mecanismo formal de alteração de probabilidades (ou alteração de crenças, no sentido Bayesiano). Para apreciar melhor este aspecto, a Figura 8.30 mostra os sucessivos histogramas do índice de corrosão $X = i_c$ à medida que se foram obtendo novas medições desta variável, a saber $x = \{0.99\}$, $x = \{0.99, 0.99\}$, $x = \{0.99, 0.99, 0.46\}$, $x = \{0.99, 0.99, 0.46, 0.52\}$. Mostra-se também o histograma inicial do índice de corrosão, obtido considerando α e β com distribuição uniforme no intervalo $[1, 8]$.

Observe-se que logo após a primeira leitura, $x = \{0.99\}$, o histograma do índice de corrosão sofreu uma alteração importante, o que mostra que o histograma inicial é pouco informativo, exercendo por isso pouco influência no histograma final. Finalmente, como última nota, refira-se que o histograma final é independente da sequência de leituras.

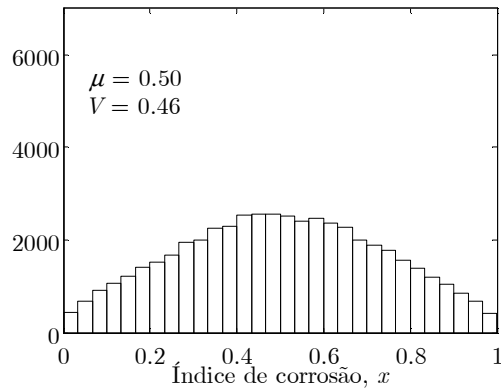
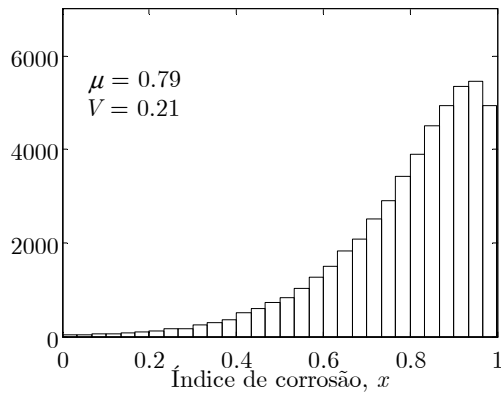
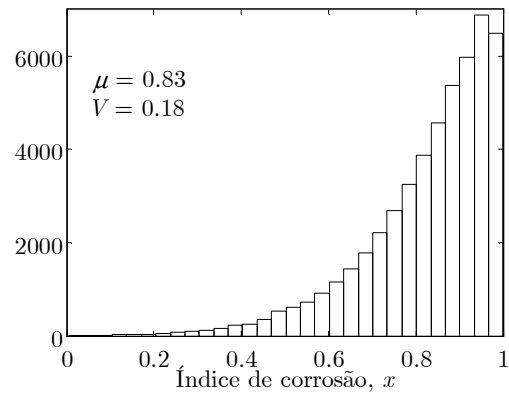
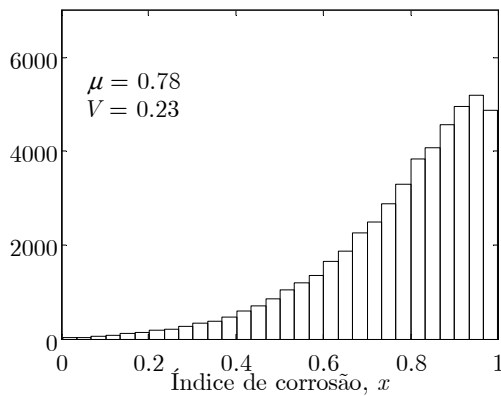
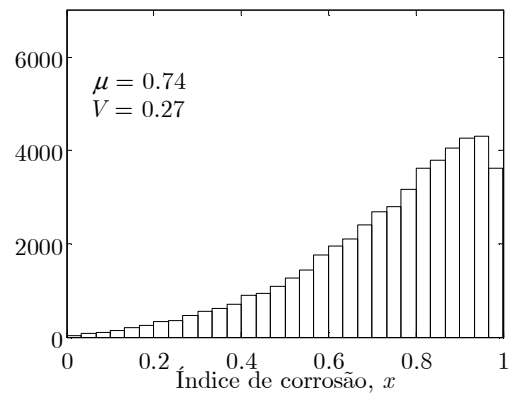
Histograma inicial (*a priori*) $x = \{0.99\}$  $x = \{0.99, 0.99\}$  $x = \{0.99, 0.99, 0.46\}$  $x = \{0.99, 0.99, 0.46, 0.52\}$

Figura 8.30: Evolução do histograma preditivo do índice de corrosão à medida que as observações foram estando disponíveis.

8.7 Análise plástica probabilística

O estudo efectuado nas secções anteriores permitiu concluir que a probabilidade da ponte vir a sofrer danos graves no prazo de um ano é relativamente diminuta, podendo considerar-se que a fiabilidade estimada ($\beta = 3.90$) é aceitável. Se este não fosse o caso, poderia prosseguir-se com análises mais avançadas ainda, como uma análise plástica probabilística ou uma análise probabilística não linear completa (Henriques, 1998). Uma vez que os objectivos principais do estudo (exploração das potencialidades das metodologias Bayesianas) já foram atingidos, não se considerou essencial realizar nenhuma dessas análises. Ainda assim, julga-se de interesse tecer algumas considerações a respeito da implementação de uma análise plástica probabilística, cuja aplicação, ao contrário de uma análise probabilística não linear completa, não requer o uso de software especializado.

O problema consiste, então, em avaliar a probabilidade de colapso do tabuleiro, correspondente à formação de um mecanismo no tramo central. Este é o mecanismo crítico da estrutura, por ser o mecanismo com menor carga de colapso associada. O modo mais simples de formular o problema é através de acções. Com efeito, designando por Q o peso das rodas do veículo tipo que, em dado momento, esteja atravessar a ponte e por Q_u o peso das rodas que provocaria o colapso da ponte, o problema consiste em determinar a probabilidade $p_f = P(Q > Q_u)$. A função estado limite, formulada aqui em termos de acções, é assim $Z = Q_u - Q$. A variável Q é uma variável básica do problema e a variável Q_u é função das restantes variáveis básicas. A probabilidade acima pode ser avaliada recorrendo ao método de MC, o que envolve uma análise plástica por cada iteração, ou por cada realização particular das variáveis básicas.

Para se determinar a carga Q_u (carga de colapso), recorre-se ao teorema cinemático, sendo que, para tal, são necessárias apenas equações de equilíbrio, ficando a tarefa bastante facilitada se se fizer uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Este princípio estabelece que é condição necessária e suficiente para o equilíbrio que o trabalho das forças exteriores seja igual ao trabalho das forças interiores ($\tau_{\text{ext}} = \tau_{\text{int}}$) para toda e qualquer rotação θ do mecanismo em apreço (ver Figura 8.11). Para que a carga Q_u assim determinada seja a verdadeira carga de colapso, é necessário verificar (em cada iteração do método de MC) que a distribuição de esforços que lhe corresponde cumpre as condições do teorema estático, o que exige verificar que não ocorrem outros modos de ruína, como a rotura por esforço transversal ou a perda generalizada de aderência. Além disso, é necessário verificar em cada iteração se a secção de vão tem capacidade de rotação suficiente para a instalação de rótulas plásticas nos apoios.

Discute-se de seguida alguns aspectos relacionados com a modelação das variáveis básicas do problema. Uma das variáveis básicas é o peso específico do betão estrutural. Uma vez que o peso específico varia de ponto para ponto na estrutura, é necessário dividir o tramo de interesse (tramo central) em diversos troços e atribuir um peso específico distinto para cada troço. Os coeficientes de correlação entre os pesos específicos dos diferentes troços dependem naturalmente do comprimento desses troços.

Relativamente à resistência do betão, é necessário definir três variáveis básicas (em correspondência com as três rótulas plásticas envolvidas): uma para a resistência no apoio 1, outra para a resistência no vão e outra para a resistência no apoio 2 (Figura 8.11). É novamente necessário estabelecer as correlações entre essas variáveis. Observe-se, porém, que a adopção de uma correlação perfeita e positiva, que corresponderia a considerar uma única variável de resistência (em vez de três), seria um procedimento conservativo. De facto tal procedimento faria aumentar a probabilidade das resistências nas secções serem simultaneamente baixas e, bem assim, a probabilidade de colapso.

Relativamente à resistência do aço, seriam necessários definir também três variáveis básicas, correspondentes às secções onde formam rótulas plásticas (apoios e vão). Mas também aqui a correlação entre as resistências do aço nessas secções não pode ser ignorada. Tal como sucede com a resistência do betão, a adopção de uma correlação perfeita e positiva seria um procedimento conservativo.

Observa-se assim que a diferença fundamental entre a análise probabilística feita anteriormente, que pode ser considerada uma análise ao nível da secção (envolvendo a ocorrência de apenas um único estado limite), e a análise plástica probabilística, que pode ser considerada uma análise ao nível do sistema (envolvendo a ocorrência de três estados limites), é que esta última obriga à especificação das correlações de variáveis que não podem ser consideradas independentes.

8.8 Considerações finais

O estudo desenvolvido no presente capítulo tratou da avaliação da segurança de uma ponte existente em avançado estado de degradação. Constatou-se que a aplicação dos critérios tradicionais de segurança (método dos coeficientes parciais de segurança em associação com o método dos estados limites) conduziu à classificação da ponte como insegura. Apesar disso, o recurso a métodos mais refinados de avaliação da segurança mostrou que o risco de colapso no prazo de um ano é relativamente diminuto. Este exemplo põe assim em evidência o benefício de metodologias mais avançadas de avaliação de segurança (Jacinto *et al.*, 2010a). De facto, frequentemente, o emprego

destas metodologias permite classificar como seguras (ou suficientemente fiáveis) pontes classificadas como inseguras pelo emprego de metodologias tradicionais de segurança, evitando-se assim custos dispendiosos, típicos de trabalhos de reforço (ou aumento da segurança).

O estudo efectuado mostrou também a vantagem de iniciar uma avaliação estrutural com métodos mais simples, baseados nos critérios tradicionais de segurança. Essa fase pode ser apropriadamente designada por *avaliação preliminar da segurança*. Se o emprego desses métodos, em geral conservativos, conduzir à classificação da ponte como segura, o processo termina. Se, pelo contrário, tais métodos conduzirem à classificação da ponte como insegura, avança-se para o emprego de metodologias mais avançadas, incidindo nos pontos críticos identificados durante a avaliação preliminar da segurança.

O estudo efectuado ilustrou a aplicação de duas dessas metodologias: análise plástica e análise probabilística. A análise plástica permite explorar eventuais reservas de segurança que possam existir (se a estrutura for hiperstática) e é de muito fácil aplicação, por se basear fundamentalmente em equações de equilíbrio.

Relativamente à análise probabilística, método que abandona o conceito de coeficiente de segurança, trata-se de um tipo de análise muito potente, pois permite modelar de forma explícita e consistente as diferentes fontes de incerteza inerentes ao problema em estudo, algumas delas podendo ser do tipo epistémico, como foi o caso do estado de perda de secção nas armaduras da secção crítica da ponte. Além disso, permite ter uma percepção do risco de ocorrência de danos graves, algo que não é possível com a análise determinística (ou semi-probabilística) baseada em coeficientes de segurança.

O emprego de metodologias probabilísticas requer, porém, uma atenção muito especial. De facto, os problemas de fiabilidade estrutural são muito sensíveis às caudas das distribuições (caudas superiores no caso das acções e caudas inferiores no caso das resistências). Dois modelos probabilísticos com FDP aparentemente idênticas podem conduzir a probabilidades de falha bastante diferenciadas, bastando que o peso das caudas desses modelos seja ligeiramente diferente na região de interesse (região inferior ou região superior). O contrário também é verdade, isto é, dois modelos probabilísticos com forma nitidamente diferente podem conduzir a probabilidades de falha idênticas, bastando que o peso das caudas na região de interesse seja idêntico. Assim, a escolha dos modelos probabilísticos deve ser convenientemente justificada. No presente estudo apresentou-se uma justificação cuidadosa para cada modelo probabilístico adoptado.

Além de uma justificação devidamente fundamentada para cada modelo probabilístico adoptado, é muito importante, em análises probabilísticas, efectuar uma análise de sensibilidade, recorrendo, por exemplo, aos coeficientes de sensibilidade FORM. Se o problema de fiabilidade for muito sensível a umas poucas variáveis, deve-se investigar a razão dessa sensibilidade. Por outro lado, se se desejar uma estimativa mais refinada da fiabilidade, a análise de sensibilidade constitui um guia na selecção das variáveis para as quais se espera obter benefícios superiores com a recolha de nova informação. Foi o que aconteceu com a variável «índice de corrosão» do problema em estudo.

O estudo desenvolvido permitiu destacar as potencialidades da abordagem Bayesiana em avaliações estruturais. Esta abordagem permite actualizar os modelos probabilísticos de variáveis básicas sempre que novas informações, colhidas da ponte em avaliação, se tornem disponíveis. O exemplo estudado ilustrou a actualização Bayesiana da distribuição Beta, usada na modelação do índice de corrosão. Conforme se viu, o modelo preditivo Bayesiano dessa variável sofreu, após actualização, uma deslocação de massa probabilística para a direita, tendo originado um incremento substancial no índice de fiabilidade da ponte. Salienta-se que este incremento resultou da medição do diâmetro residual de varões em apenas quatro locais, previamente seleccionados.

Outra potencialidade da abordagem Bayesiana ficou evidente na modelação da resistência do betão. Recorde-se que para caracterizar esta variável dispunha-se dos resultados do ensaio de 9 carotes extraídas da ponte. A abordagem Bayesiana permitiu modelar a incerteza originada no facto dos parâmetros do modelo probabilístico (modelo Lognormal, no presente caso) terem sido estimados a partir de uma amostra relativamente pequena. Como se demonstrou, essa incerteza teve um impacto relativamente pequeno na fiabilidade estimada da ponte, o que permitiu considerar a informação contida na amostra como suficiente para o fim em vista, apesar da amostra ser relativamente pequena.

Capítulo 9

Conclusões e desenvolvimentos futuros

9.1 Conclusões

Considerando os enormes prejuízos económicos, sociais e até políticos que resultam de colapsos estruturais, bem como o elevado grau de aversão pública a esse tipo de acidentes, torna-se imperativo assegurar que as pontes em serviço, com o seu envelhecimento natural, mantenham elevados níveis de fiabilidade. Acontece, porém, que os fundos disponíveis para a realização de trabalhos de reparação e reforço são em geral escassos, o que constitui para os donos de obra um enorme desafio. Há pois a necessidade de criar mecanismos que permitam aplicar de forma racional e criteriosa os escassos fundos disponíveis. Com o presente trabalho pretendeu-se dar um contributo para que tema da segurança de pontes existentes seja tratado da forma mais racional possível. Faz-se de seguida uma breve síntese do trabalho e descrevem-se as principais conclusões obtidas.

O Capítulo 2 tratou de conceitos importantes no domínio da segurança estrutural e descreveu os métodos disponíveis de verificação da segurança, ou métodos de fiabilidade. Na fase de dimensionamento (projecto de estruturas novas) o método mais adequado é sem dúvida o método dos coeficientes parciais de segurança, que faz parte dos chamados métodos de nível I. Podem apontar-se diversas razões: (1) simplicidade do método, face aos métodos puramente probabilísticos; (2) prática bem sucedida com o emprego do método no projecto de estruturas no passado e (3) o facto de se reconhecer que a segurança das estruturas não se esgota nos métodos de fiabilidade empregues no projecto, mas depende em grande medida da qualidade da construção que vier a ter lugar.

No entanto, quando se passa da fase de dimensionamento para a fase de avaliação (estruturas construídas e em serviço) o problema da segurança adquire particularidades próprias. Duas delas devem ser destacadas: (1) as incertezas envolvidas no problema da segurança podem ser melhor quantificadas, e muitas vezes reduzidas, uma vez a estrutura construída; (2) o custo marginal de segurança é bastante superior quando a estrutura já está construída. Qualquer um destes factores encoraja o uso de métodos de fiabilidade mais avançados em avaliações estruturais, como os métodos de nível II e os métodos de nível III. Com efeito, tendo presente que a forma mais consistente de lidar com incertezas é modelá-las segundo os preceitos da teoria das probabilidades e que, como se disse, as incertezas alteram-se quando a estrutura deixa de ser conceptual e passa a ser real, faz todo sentido empregar estas metodologias na avaliação da segurança de pontes existentes. Por outro lado, considerando que o reforço de uma estrutura existente é em geral bastante oneroso, o problema da segurança deve ser tratado da forma mais rigorosa possível, o que constitui um incentivo para o uso de metodologias probabilísticas.

A experiência tem mostrado que pontes que não cumprem os critérios de segurança adoptados no dimensionamento podem apresentar níveis de fiabilidade aceitáveis. Esta constatação, divulgada por vários autores citados ao longo do texto, veio a ser confirmada no caso de estudo desenvolvido no âmbito da presente dissertação. Isto mostra que os valores característicos das variáveis básicas e os coeficientes de segurança preconizados nos regulamentos vocacionados para o dimensionamento podem não reflectir correctamente os níveis de incerteza de uma estrutura particular existente. Conclui-se assim que os regulamentos vocacionados para o projecto de pontes novas não são adequados para a realização de avaliações estruturais, havendo, por conseguinte, a necessidade de desenvolver regulamentação específica no âmbito da segurança de pontes existentes. Outra conclusão importante a reter é que, em processos de avaliação estrutural, as estruturas devem ser tratadas em base individual, caso a caso. Cada estrutura tem as suas próprias especificidades, quer no que diz respeito às propriedades dos materiais, quer no que diz respeito à qualidade e cuidado com que foi executada, quer ainda no que diz respeito às próprias acções a que está sujeita. Viu-se, por exemplo, que as sobrecargas rodoviárias podem variar significativamente de ponte para ponte, dependendo da tipologia e intensidade de tráfego do itinerário onde se insere.

O Capítulo 4 apresentou os conceitos fundamentais do paradigma Bayesiano. De acordo com o princípio básico desse paradigma, toda a incerteza, qualquer que seja a sua natureza (aleatória ou epistémica), deve ser descrita por meio de distribuições de probabilidade. A probabilidade é interpretada simplesmente como uma medida (condicional) de incerteza, medida esta que se convencionou ser estabelecida na escala

entre 0 e 1. Esta interpretação de probabilidade é mais adequada nos problemas de segurança estrutural que a interpretação frequencista, uma vez que muitas das variáveis intervenientes têm incerteza do tipo epistémico.

A probabilidade de um evento aleatório ou de um estado desconhecido deve ser sempre encarada como estando condicionada à informação disponível. Se surgirem novas fontes de informação relevantes, a referida probabilidade deverá ser modificada, ou actualizada, em conformidade com essa informação. O teorema de Bayes oferece o mecanismo de modificação, ou actualização, de probabilidades.

Um caso importante de actualização ocorre quando a nova informação é do tipo amostral e tem interesse no âmbito das avaliações estruturais. Com efeito, a informação colhida de uma ponte em avaliação apresenta-se frequentemente na forma de amostras, como por exemplo, amostra de resistências do betão, amostra de resistências de aços, amostra de recobrimentos, amostra de pesos de veículos, etc. Quando se dispõe de uma amostra referente a uma determinada variável, começa-se em geral por estimar os parâmetros do modelo probabilístico escolhido para modelar essa variável. Deve-se ter presente, no entanto, que a amostra disponível é apenas uma entre as muitas amostras que poderiam ter sido extraídas do modelo escolhido. Outras amostras conduziriam a estimativas diferentes, pelo que os verdadeiros valores dos parâmetros do modelo nunca serão conhecidos. A incerteza nos parâmetros dos modelos probabilísticos (incerteza estatística) resulta assim do facto de se estimar os parâmetros a partir de amostras de dimensão finita. De um ponto de vista Bayesiano tal incerteza deverá ser descrita por meio de uma distribuição de probabilidade, o que leva a modelar os parâmetros dos modelos probabilísticos como variáveis aleatórias. O capítulo 4 mostrou os benefícios de se modelarem os parâmetros dos modelos probabilísticos por meio de variáveis aleatórias: (1) os modelos Bayesianos sempre incluem a incerteza estatística e (2) permitem combinar informação amostral com outro tipo de informação.

No Capítulo 4 desenvolveu-se ainda um algoritmo baseado no método de Monte Carlo que permite a geração de amostras preditivas de qualquer distribuição de probabilidade. Este algoritmo combina duas técnicas de simulação bem estabelecidas: o método da aceitação-rejeição e o método da composição. Propôs-se um critério que permite acelerar a taxa de aceitação e assim aumentar a eficiência do algoritmo.

O Capítulo 5 investigou o impacto da incerteza estatística em quantidades usadas com frequência no âmbito da fiabilidade estrutural: valores característicos, coeficientes de segurança e índices de fiabilidade. Como se disse acima, a incerteza estatística é o reflexo da dimensão das amostras disponíveis e tende a anular-se à medida que a dimensão das amostras aumenta. No entanto, como se demonstrou

nesse Capítulo, o impacto da incerteza estatística não depende só da dimensão das amostras disponíveis: depende também da quantidade a estimar e do coeficiente de variação das amostras. Quanto mais para o interior das caudas dos modelos probabilísticos estiver a quantidade a estimar, maior é o impacto da incerteza estatística, e consequentemente maior é a necessidade de dispor de amostras de dimensão maior. Da mesma forma, quanto maior é o coeficiente de variação amostral maior é o impacto da incerteza estatística e maior é a conveniência em dispor-se de amostras de dimensão superior. O estudo realizado permitiu concluir que, para efeitos de estimativa de valores característicos de propriedades dos materiais, não são em geral necessárias amostras de grande dimensão, sendo suficientes amostras de dimensão entre 10 e 15, nos casos mais frequentes. No entanto, a situação é diferente quando se pretende estimar índices de fiabilidade associados a acontecimentos com baixa probabilidade de ocorrência, como é o caso dos estados limites últimos. Nestes casos, a incerteza estatística pode penalizar severamente as estimativas de fiabilidade, pelo que a sua não consideração constitui uma prática contra a segurança.

Uma vez que a incerteza estatística é de natureza epistémica, isto é, é susceptível de ser reduzida se for possível colher informação adicional, é importante avaliar o seu impacto a fim de decidir se se justifica ou não colher informação adicional. Para tal, propuseram-se dois métodos: um consiste em comparar a estimativa Bayesiana da quantidade de interesse (que inclui adequadamente o efeito da incerteza estatística) com a estimativa que seria obtida se não existisse incerteza estatística, isto é, se a amostra tivesse dimensão infinita; o segundo método consiste em expressar a quantidade de interesse como função dos parâmetros do modelo (considerados variáveis aleatórias) e obter, via método de MC, a distribuição de probabilidade dessa mesma quantidade. O desvio padrão obtido constitui uma boa medida da incerteza estatística nessa quantidade. Outras medidas, tais como intervalos de credibilidade, poderão também ser usadas.

Se o impacto devido à incerteza estatística na quantidade que estiver a ser estimada for significativo, há toda a conveniência em procurar informação adicional com o objectivo de reduzir o referido impacto. Uma forma de o fazer é por consulta de bibliografia especializada contendo recomendações referentes ao modelo probabilístico da variável em questão. O Capítulo 6 tratou especificamente do problema da combinação de informação colhida de uma estrutura em avaliação (informação amostral) com uma recomendação colhida de bibliografia (informação anterior) referente ao modelo amostral em questão. Uma das principais conclusões a reter do estudo é que antes de se decidir combinar as duas fontes de informação é muito importante averiguar o grau de compatibilidade entre essas informações. Casos haverá que, por falta de compatibilidade, a combinação dessas duas fontes de

informação resulte num aumento da incerteza, com reflexos negativos nas estimativas que estiverem a ser efectuadas. O grau de compatibilidade pode ser avaliado recorrendo a uma análise estatística de comparação de médias. Se essa análise sugerir que as fontes de informação pertencem a populações distintas, as informações não devem ser combinadas. Neste caso, o procedimento recomendado é usar apenas uma fonte de informação, a que for julgada mais credível. Por outro lado, quando a informação amostral e a informação anterior forem compatíveis, poderá haver lugar a uma redução substancial da incerteza estatística, com reflexos positivos nas estimativas que estiverem a ser efectuadas.

No Capítulo 7 fez-se uma aplicação muito particular do paradigma Bayesiano: caracterização probabilística da resistência do betão de estruturas existentes recorrendo a ensaios indirectos devidamente calibrados. Actualmente o ensaio directo de carotes é o método mais preciso na caracterização da resistência do betão de uma estrutura existente. Contudo, por se tratar de uma técnica cara e morosa, além de parcialmente destrutiva, o número de carotes que é possível extrair da estrutura em avaliação é em geral limitado, o que tem reflexos negativos na incerteza estatística. Este inconveniente pode ser ultrapassado complementando os ensaios de carotes com algum tipo de ensaio indirecto, devidamente calibrado a partir dos resultados das carotes disponíveis. Uma vez que os ensaios indirectos são bastante mais económicos e de uso mais simples, além de que a maioria não introduzem qualquer dano na estrutura, é possível obter com relativa facilidade e rapidez um grande número de medições, complementando assim o reduzido número de ensaios directos. Os ensaios indirectos introduzem, porém, duas novas fontes de incerteza: uma tem origem no facto da calibração ser realizada a partir de um número reduzido de carotes e a outra na falta de precisão do ensaio indirecto. Demonstrou-se que a redução na incerteza estatística devido ao facto de se dispor de um número significativo de medições com o ensaio indirecto pode compensar as incertezas introduzidas por esse ensaio.

Desenvolveu-se ainda um algoritmo que permite estimar o número de carotes acima do qual não se verifica a referida compensação, caso em que o ensaio indirecto deixa de ser atractivo. Demonstrou-se que esse número depende da precisão do ensaio indirecto e da homogeneidade do betão, medida pelo coeficiente de variação da resistência. O algoritmo desenvolvido pode ser usado sempre que se pretenda decidir se determinado ensaio indirecto deve ou não ser usado com o objectivo de caracterizar a resistência do betão da estrutura que estiver a ser avaliada.

Por fim, no Capítulo 8, avaliou-se a segurança de uma ponte existente em avançado estado de deterioração. O processo iniciou-se com uma avaliação preliminar da segurança, baseada nos critérios de segurança previstos na regulamentação

portuguesa actualmente em vigor, tendo-se concluído que a ponte não cumpre esses critérios, o que conduziu à classificação da ponte como insegura. Ainda assim, recorrendo a duas metodologias que não são de uso corrente no projecto de estruturas novas — análise plástica e análise probabilística —, foi possível demonstrar que o risco de colapso está relativamente controlado no curto prazo, o que permitiu manter a ponte em funcionamento, ainda que com algumas restrições de tráfego. Os benefícios do emprego de metodologias mais avançadas de segurança ficaram então evidentes.

No caso de estruturas hiperstáticas, a análise plástica permite tirar partido de eventuais reservas de segurança que possam existir. No caso de estudo em apreço, e porque havia uma boa reserva de segurança nas secções de apoio, a análise plástica permitiu elevar substancialmente a capacidade de carga da superestrutura. A análise probabilística, que abandona o conceito de coeficiente de segurança, é muito potente, pois permite modelar as incertezas efectivamente existentes no problema concreto. Além disso, permite ter uma percepção do risco de ocorrência de danos graves, algo que não é possível com o método dos coeficientes de segurança. A análise probabilística, particularmente o método FORM, permite ainda efectuar com relativa facilidade uma análise de sensibilidade, mostrando quais as variáveis cuja incerteza mais contribui para a fiabilidade que acabou de ser estimada. A análise de sensibilidade constitui assim um guia valioso na selecção das variáveis para as quais se justifica procurar informações adicionais, caso se pretenda estimar melhor a fiabilidade da ponte.

Este mesmo estudo evidenciou ainda as potencialidades da abordagem Bayesiana no âmbito da avaliação da segurança de pontes existentes. De facto, uma vez recolhida informação adicional relativa às variáveis previamente seleccionadas, a abordagem Bayesiana oferece o mecanismo que permite juntar essa nova informação à que se tinha inicialmente, actualizando as respectivas distribuições de probabilidade e consequentemente a fiabilidade da estrutura. Por outro lado, a abordagem Bayesiana dá-nos a garantia que a incerteza estatística é sempre considerada.

9.2 Recomendações para uma metodologia de avaliação da segurança de pontes existentes

Com base nas conclusões tiradas com o desenvolvimento do presente trabalho, propõem-se de seguida algumas recomendações que poderão ser úteis em processos de avaliação estrutural de pontes existentes. Não se vão repetir aqui todos os aspectos mencionados no Capítulo 3, que reportou recomendações de vários autores, mas

apenas os aspectos que se considera mais importantes, com ênfase naqueles que se espera ter contribuído com a realização da presente dissertação.

Em primeiro lugar, e considerando que a forma mais racional e lógica de abordar uma avaliação estrutural é realizá-la por etapas de complexidade crescente, mas que não há muita vantagem em subdividir o processo em muitas etapas, propõe-se que uma avaliação estrutural seja realizada em três fases, para além da fase inicial, ou preparatória, onde se definem os objectivos da avaliação. Propõe-se pois o seguinte faseamento:

Início. Uma avaliação estrutural deve iniciar-se com o estabelecimento dos objectivos da avaliação. Em geral os objectivos resultam de forma natural dos motivos que desencadearam a avaliação que se está a iniciar. Na maioria das vezes a avaliação estrutural é realizada porque existem dúvidas sobre a segurança da ponte em questão. Além da especificação dos objectivos, é também importante estabelecer nesta fase o tempo de vida útil residual pretendido para a ponte, pois isso influi directamente nos níveis de fiabilidade que se deve exigir. Quanto maior for esse período, maior deve ser a fiabilidade actual da ponte. Se o período de vida útil residual não for especificado, deve ser tomado como idêntico à vida útil de projecto típica de pontes novas (50 a 100 anos). Uma avaliação estrutural inicia-se também, de uma forma geral, com uma visita ao local.

Fase 1 — Avaliação preliminar da segurança. Nesta fase efectuam-se as primeiras verificações de segurança. Usam-se modelos simples e recorre-se à informação disponível respeitante à ponte, como seja o projecto, registos de obra, e os resultados de eventuais inspecções anteriores. Emprega-se o método dos coeficientes parciais de segurança preconizados nas normas e regulamentos que estiverem em vigor. Esta fase é muito importante, não só por constituir uma primeira indicação a respeito do estado de segurança, mas também por permitir identificar os pontos críticos da estrutura, que serão objecto de análises mais refinadas nas fases subsequentes. Se as dúvidas iniciais forem dissipadas, o processo termina.

Fase 2 — Avaliação de nível intermédio. Nesta fase empregam-se modelos estruturais mais avançados, incluindo eventualmente análises não lineares, com redistribuição parcial ou total de esforços. Poderão realizar-se um conjunto de ensaios julgados convenientes, cujos resultados deverão então ser usados. Os critérios de segurança continuam a basear-se no método dos coeficientes de segurança, conforme preconizados na regulamentação aplicável. Se nesta fase não for possível ainda dissipar as dúvidas iniciais, deve-se passar à fase seguinte.

Fase 3 — Avaliação de nível avançado. Nesta fase empregam-se métodos probabilísticos de avaliação da segurança, que permitirão avaliar de forma mais

realista a fiabilidade da ponte. No entanto, considerando que os problemas de fiabilidade são muito sensíveis à forma e peso das caudas dos modelos probabilísticos, estes devem ser convenientemente justificados. Em geral é possível encontrar na bibliografia recomendações para os modelos probabilísticos das principais variáveis do problema. Chama-se a atenção para que a análise probabilística deve ser sempre acompanhada de uma análise de sensibilidade. Se o problema for muito sensível a algumas das variáveis deve-se analisar as razões para essa sensibilidade. Por outro lado, caso se deseje actualizar a fiabilidade da ponte com base em informações a recolher através, por exemplo, da realização de novos ensaios, a análise de sensibilidade servirá de ajuda na escolha dos ensaios potencialmente mais úteis. Nos casos em que se opte por colher dados adicionais, se estes forem de natureza amostral, recomenda-se a adopção da abordagem Bayesiana, uma vez que esta não ignora a informação anterior, além de que modela adequadamente a incerteza estatística. Considera-se importante modelar de forma sistemática a incerteza estatística, excepto nos casos em que se demonstre que esta tem um impacto desprezável na estimativa da fiabilidade da ponte. Nos casos em que a incerteza estatística penaliza severamente as estimativas de fiabilidade, ela poderá ser reduzida por se recorrer a informação anterior fidedigna. No entanto, antes de se incorporar essa informação, é importante analisar o grau de compatibilidade entre essa informação e a informação extraída da ponte.

9.3 Sugestões para desenvolvimentos futuros

O trabalho que está agora a terminar permitiu identificar algumas áreas com interesse para desenvolvimentos futuros.

Assim, por exemplo, constatou-se que os critérios de aceitação de fiabilidade variam substancialmente de país para país. Ora, considerando que o problema da segurança de pontes existentes pode ser estabelecido em bases bastante sólidas, não existem razões para existirem diferenças tão significativas. Trabalho de investigação adicional e acções de divulgação poderão contribuir para a uniformização desses critérios.

A modelação das sobrecargas rodoviárias é outra área onde se poderão dar contributos valiosos. Embora haja muito trabalho publicado neste domínio, há grande interesse em dispor de modelos probabilísticos simplificados, mas suficientemente precisos, para serem usados no âmbito da avaliação da segurança de pontes existentes. Com a entrada em vigor dos eurocódigos, e à falta de regulamentação nacional vocacionada para a segurança de pontes existentes, antevêem-se algumas dificuldades, muito em especial as resultantes do emprego dos modelos de sobrecarga

previstos na EN 1991-2. Estes modelos conduzem a esforços francamente superiores aos da actual regulamentação, com base na qual as pontes existentes foram dimensionadas. Muitas pontes poderão vir a ser classificadas como inseguras, se forem usadas esses modelos sem nenhuma correcção.

Refere-se também a modelação das incertezas nos modelos de transformação, nomeadamente nos modelos estruturais e nos modelos de resistência. Verificam-se diferenças importantes entre recomendações de diferentes autores. Considerando que os problemas de fiabilidade são em geral bastante sensíveis a essas incertezas, como se verificou no caso de estudo, julga-se que haverá interesse em realizar investigação neste domínio, até porque se tratam de incertezas claramente do tipo epistémico.

A metodologia desenvolvida no Capítulo 7 foi aplicada apenas a um caso real, envolvendo o uso do esclerómetro. Seria interessante aplicar a metodologia a outros casos reais, incluindo o uso de outros tipos de ensaio indirectos, com o objectivo de caracterizar melhor as suas potencialidades e limitações.

Uma área onde existem lacunas importantes diz respeito à influência do estado de deterioração na fiabilidade das pontes. A Norma AASHTO LRFR propõe coeficientes de redução dos esforços resistentes para ter em conta a condição actual da estrutura em avaliação, mas refere explicitamente que esses coeficientes se destinam sobretudo a cobrir a incerteza da influência dessa condição nos esforços resistentes. Programas experimentais simulando condições de deterioração reais poderão contribuir para reduzir a referida incerteza. Uma questão importante a esclarecer é a influência da perda de aderência (provocada pela delaminação) na capacidade resistente.

Haverá também interesse em realizar trabalho de investigação na área da modelação de opiniões de especialistas no contexto da segurança de pontes existentes. As técnicas de modelação de opiniões de especialistas, em geral consideradas numa perspectiva Bayesiana, estão razoavelmente bem estabelecidas e têm sido utilizadas em vários domínios do conhecimento, mas não no contexto da segurança estrutural, tanto quanto se pode constatar. Uma vez que no domínio específico da segurança de pontes existentes é possível encontrar pessoas com experiência significativa, as suas opiniões, ainda que subjectivas, certamente são valiosas e poderão ser consideradas como informação *a priori* numa perspectiva Bayesiana.

Bibliografia

- Agarwal, J. & England, J. (2008). Recent developments in robustness and relation with risk. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, **161**,183-188.
- Akesson, B. (2008). *Understanding bridge collapses*. Taylor & Francis Group, London, UK.
- Ang, A. H. & Tang, W. H. (2007). *Probability Concepts in Engineering*. John Wiley & Sons, Chichester, 2nd edition.
- BA 54/94 (1995). *Load testing for bridge assessment*. Design Manual for Roads and Bridges. Vol. 3, Section 4, Part 8,
<http://www.standardsforhighways.co.uk/dmrb/vol3/>.
- BD 21/01 (2001). *The Assessment of Highway Bridges and Structures*. Design Manual for Roads and Bridges. Vol. 3, Section 4, Part 3,
<http://www.standardsforhighways.co.uk/dmrb/vol3/>.
- Bedford, T. & Cooke, R. (2001). *Probabilistic risk analysis*. Cambridge University Press.
- Benjamim, J. R. & Cornell, C. A. (1970). *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. McGraw-Hill, New-York.
- Bernardo, J. M. & Smith, A. F. M. (1994). *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons.
- Bernardo, J. M. (2009). *Bayesian Methodology in Statistics*. In: Brown S, Tauler R, Walczak R (eds.) *Comprehensive Chemometrics*, volume 1, pp. 213-245. Elsevier, Oxford.
- Borges, J. F. (1954). *O dimensionamento de estruturas*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, publicação n.º 54, Lisboa.
- Borges, J. F. & Castanheta, M. (1985). *Structural Safety*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

- Box, G. E. P. & Tiao, G. C. (1992). *Bayesian inference in statistical analysis*. John Wiley & Sons, Wiley Classics Library.
- Branco, F. A. & Brito, J. (2004). *Handbook of Concrete Bridge Management*. American Society of Civil Engineers. ASCE Press, USA.
- BRIME (2001). D14: *Final Report. Bridge Management in Europe*. IV Frame-Work program, Brussels, <http://www.trl.co.uk/brime/index.htm>.
- BRIME (2001b). D5: *Development of models (loads and strength)*. IV Frame-Work program, Brussels, <http://www.trl.co.uk/brime/index.htm>.
- Calçada, R. (2001). *Avaliação experimental e numérica de efeitos dinâmicos de cargas de tráfego em pontes rodoviárias*. Tese de doutoramento. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Calgaro, J. A., Tschumi, M. & Gulvanessian, H. (2010). *Designers' Guide to Eurocode 1: Actions on Bridges. EN 1991-2, EN 1991-1-1, -1-3 to 1-7 and EN 1990 Annex A2*. Thomas Telford, London.
- CAN/CSA-S6-00 (2000). *Canadian Highway Bridge Design Code*. Canadian Standards Association, Toronto.
- CAN/CSA-S6-00b (2000). *Commentary on CAN/CSA-S6-00, Canadian Highway Bridge Design Code*. Canadian Standards Association, Toronto.
- Caprani, C., Belay, A. & O'Connor, A. J. (2003). *Site-specific probabilistic load modelling for bridge reliability analysis*. Proceedings of the 3rd. International Conference on Current and Future Trends in Bridge Design, Construction and Maintenance, eds. B.I.G. Barr et al, Shanghai, China, Thomas Telford, pp.341-348.
- Caprani, C. C. (2005). *Probabilistic analysis of highway bridge traffic loading*. Ph.D. Thesis. National University of Ireland, University College Dublin, School of Architecture, Landscape and Civil Engineering. Dublin.
- Casas, J. R. (2006). *Bridge Management: Actual and future trends*. Proc. of IABMAS'06, Porto. Cruz, P.J., Frangopol, D.M. & Neves, L.C. (eds). Taylor & Francis, London.
- Casas, J. R., Wisniewski, D. & Sloth, M. (2008). *Upgrading existing railway bridges*

- in Europe for higher speeds and loads — assessment procedures and requirements.* Proc. of the 17th Congress of IABSE, "Creating and Renewing Structures, Chicago.
- Chen, M. H., Shao, Q. M. & Ibrahim, J. G. (2000). *Monte Carlo methods in Bayesian computation.* Springer-Verlag.
- Congdon, P. (2003). *Applied Bayesian Modelling.* John Wiley & Sons Ltd, Chichester, London.
- Cooper, D. I. (1997). Development of short span bridge-specific assessment live loading, in *Safety of bridges.* Thomas Telford, London, edited by P. C. Das.
- COST 345 (2004a). Working Groups 2 and 3: *Methods used in European States to Inspect and Assess the Condition of Highway Structures. Procedures Required for Assessing Highway Structures.* European Comission. Directorate General Transport, <http://cost345.zag.si>.
- COST 345 (2004b). Working Groups 4 and 5: *Numerical techniques for Safety and Serviceability Assessment. Procedures Required for Assessment Highway Structures.* European Comission. Directorate General Transport, <http://cost345.zag.si>.
- Cremona, C. (2001). Optimal extrapolation of traffic load effects. *Structural Safety*, **23**, 31-46.
- Crespo-Minguillón, C. & Casas, J. R. (1997). A comprehensive traffic load model for bridge safety checking. *Structural Safety*, **19**, 339-359.
- Cruz, P., Wisniewski, D. & Casas, J. R. (2008). Métodos de avaliação da segurança de pontes existentes. *Revista portuguesa de engenharia de estruturas*, Série II, Número 3, Maio 2008, pp. 19-30.
- Dawe, P. H. (2003). *Research perspectives: Traffic loading on highway bridges.* Thomas Telford, London.
- Diamantidis, D. & Bazzurro P. (2007). Safety acceptance criteria for existing structures. *Workshop on Risk Acceptance and Risk Communication*, Stanford University, USA.
- Ditlevsen, O. & Madsen, H. O. (1994). Stochastic vehicle-queue-load model for large bridges. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **120**, 1829-1847.

- Ditlevsen, O. & Madsen, H. O. (2005). *Structural Reliability Methods*. Internet edition 2.2.5. <http://www.mek.dtu.dk/staff/od/books.htm>.
- EN 12504-2 (2001). *Testing concrete in structures – Part 2: Non-destructive testing – Determination of rebound number*. Comité Européen de Normalization (CEN), Brussels.
- EN 1991-2 (2003). *Eurocode 1: Actions on structures – Part 2: Traffic loads on bridges*. Comité Européen de Normalization (CEN), Brussels.
- Enevoldsen, I. (2009). *Practical Implementation of Probability Based Assessment Methods for Bridges*. Actas do 1.º Congresso Nacional sobre Segurança e Conservação de Pontes, Lisboa. Cruz, P., Mendonça, T., Neves, L., Santos, L. (eds.).
- Engelund, S. & Rackwitz, R. (1992). On predictive distribution for the three asymptotic extreme value distributions. *Structural Safety*, **11**, 255-258.
- Faber, M. H., Val, D. V. & Stewart, M. G. (2000). Proof Load Testing for Bridge Assessment and Upgrading. *Engineering Structures*, **22**, 1677-1689.
- fib (2003). *Monitoring and Safety Evaluation of Existing Concrete Structures*. Bulletin 22, State-of-art report. Fédération Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland.
- fib (2006). *Model Code for Service Life Design*. Bulletin 34. Fédération Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland.
- FIP (1998). *Design of post-tensioned slabs and foundation*. Fédération Internationale de la Précontrainte. London.
- Fishman, G. S. (1995). *Monte Carlo: concepts, algorithms and applications*. Springer-Verlag.
- Gómez, J. D. & Casas, J. R. (2008). *Target Proof Load Determination for Bridge Capacity Assessment*. Proc. of the 17th Congress of IABSE, "Creating and Renewing Structures, Chicago.
- Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of extremes*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2004. Republication of the edition published by Columbia University Press, New York, 1958.

- Gurenich, D. & Robert, W. (2006). Correlation between reduction in load capacity and structural condition of highway bridges. Proc. of IABMAS'06, Porto. Cruz, P. J., Frangopol, D. M. & Neves, L. C. (eds). Taylor & Francis, London.
- Hahn, G. J., & Shapiro, S. S. (1994). *Statistical Models in Engineering*. John Wiley & Sons. Wiley Classics Library.
- Henriques, A. A. (1998). *Aplicação de novos conceitos de segurança no dimensionamento do betão estrutural*, Tese de doutoramento. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- IAEA (2002). *Guidebook on non-destructive testing of concrete structures*. International Atomic Energy Agency, Vienna.
- ISO 13822 (2001). *Bases for design of structures — Assessment of existing structures*. International Organization for Standardization, Genève.
- ISO 2394 (1998). *General Principles on Reliability for Structures*. International Organization for Standardization, Genève.
- ISO 31000 (2009). *Risk management — Principles and guidelines*. International Organization for Standardization, Genève.
- ISO/FDIS 19338 (2007). *Performance and assessment requirements for design standards on structural concrete*. International Organization for Standardization, Genève.
- Jacinto, L., Neves, L. C. & Santos, L. O. (2008). *Metodologias Bayesianas de Atualização em Avaliações Estruturais*. Actas do Encontro Nacional de Betão Estrutural (BE2008), Guimarães.
- Jacinto, L., Pipa, M., Santos, L. & Neves, L. (2011). *Statistical analysis of mechanical properties of prestressing strands*. Proceedings of the 11th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, ICASP 11, Zurich.
- Jacinto, L., Santos, L. O. & Neves, L. C. (2009). *Avaliação estrutural de pontes existentes — estado da prática*. Actas do 1.º Congresso Nacional sobre Segurança e Conservação de Pontes, Lisboa. Cruz, P., Mendonça, T., Neves, L., Santos, L. (eds.).

- Jacinto, L., Santos, L.O. & Neves, L.C. (2010b). *Bayesian probabilistic assessment of in-situ concrete strength*. IABSE symposium Large Structures and Infrastructures for Environmentally Constrained and Urbanised Areas, Venice, 22 a 24 de Setembro de 2010.
- Jacinto, L., Santos, L. O., Neves, L. C., Monteiro, A. & Gonçalves, A. (2010c). *Avaliação da resistência do betão em estruturas existentes — ensaios directos versus ensaios indirectos*. BE 2010, Encontro Nacional Betão estrutural, Lisboa, 10 a 12 de Novembro de 2010.
- Jacinto, L., Santos, L. O., Neves, L. C. & Silveira, P. (2010a). *Metodologias não tradicionais na avaliação da segurança de pontes existentes*. REPAR 2010, Conservação e reabilitação de estruturas, Lisboa, 23 a 25 de Junho de 2010.
- JCSS (2001a). *Probabilistic Model Code*. Joint Committee on Structural Safety, <http://www.jcss.ethz.ch>, 12-th draft.
- JCSS (2001b). *Probabilistic Assessment of Existing Structures*. RILEM Publications S.A.R.L., edited by D. Diamantidis.
- JCSS (2008). *Risk Assessment in Engineering. Principles, System Representation & Risk Criteria*. Joint Committee on Structural Safety, edited by M. H. Faber, <http://www.jcss.ethz.ch>.
- Kiureghian, A. & Ditlevsen, O. (2009). Aleatory or Epistemic? Does it matter? *Structural Safety*, **31**, 105-112.
- Kiureghian, A. (2008). Analysis of Structural Reliability under Parameter Uncertainties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **23**, 351-358.
- Kübler, O. (2006). *Applied Decision-Making in Civil Engineering*. Ph.D. thesis. Swiss Federal Institute of Technology, Zürich.
- Lauridsen, J., Bjerrum, J., O'Connor, A.J. & Enevoldsen, I. (2006). *Experience with probability-based assessment of bridges based upon the Danish Guideline*. Proc. of IABMAS'06, Porto. Cruz, P. J., Frangopol, D. M. & Neves, L. C. (eds). Taylor & Francis, London.
- Lauridsen, J., Jensen, J. S. & Enevoldsen, I. B. (2007). Bridge owner's benefits from probabilistic approaches. *Structure and Infrastructure Engineering*, **4**, 281-302.

- Lemaire, M. (2009). *Structural reliability*. ISTE, London. John Wiley & Sons, Hoboken.
- LESSLOSS (2007). *Probabilistic methods for seismic assessment of existing structures*. LESSLOSS project – risk mitigation for earthquakes and landslides. Report n.º 2007/06.
- LNEC (2007a). Especificação E-464: *Betões. Metodologia prescritiva para a vida útil de projecto de 50 anos face às acções ambientais*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
- LNEC (2007b). Especificação E-465: *Betões. Metodologia para estimar as propriedades de desempenho do betão que permitem satisfazer a vida útil de projecto de estruturas de betão armado ou pré-esforçado sob as exposições ambientais XC ou XS*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil.
- Madsen, H. O., Krenk, S. & Lind, N. C. (1986). *Methods of Structural Safety*. Prentice Hall, New Jersey.
- Melchers, R. E. (1999). *Structural Reliability Analysis and Prediction*. John Wiley & Sons, Chichester, 2nd edn.
- Meyer, P. L. (1983). *Probabilidade. Aplicações à Estatística*. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2.ª edição.
- Monteiro, A. & Gonçalves, A. (2008). *Avaliação da resistência à compressão do betão nas estruturas com base em Ensaios Esclerométricos..* Actas do Encontro Nacional de Betão Estrutural (BE2008), Guimarães.
- Montgomery, D. C. & Runger G. C. (2007). *Applied Statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, fourth edition.
- Moses, F. (2001). *Calibration of load factors for LRFR bridge evaluation*. National Cooperative Highway Research Program, NCHRP report 454. National Academy Press, Washington, D.C.
- Murteira, B., Ribeiro, C., Silva, J. & Pimenta, C. (2008). *Introdução à Estatística*. 2.ª edição. Mc Graw Hill, Madrid.
- Neves, L. C. (2005). *Life-Cycle analysis of bridges considering condition, safety and maintenance cost interaction*. Ph.D. Thesis. Universidade do Minho,

Departamento de Engenharia Civil, Azurém, Guimarães.

NP EN 13791 (2008). *Avaliação da resistência à compressão do betão nas estruturas e em produtos pré-fabricados*. IPQ, Instituto Português da Qualidade, Caparica.

NP EN 1990 (2009). *Eurocódigo – Bases para o projecto de estruturas*. IPQ, Instituto Português da Qualidade, Caparica.

NP EN 1992-1-1 (2010). *Eurocódigo 2 – Projecto de estruturas de betão. Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. IPQ, Instituto Português da Qualidade, Caparica.

NP EN 206-1 (2007). *Betão. Parte 1: Especificação, desempenho, produção e conformidade*. IPQ, Instituto Português da Qualidade, Caparica.

O'Connor, A. & O'Brien, E.J. (2005). Traffic load modelling and factors influencing the accuracy of predicted extremes. *Canadian Journal of Civil Engineering*, **32**, 270-278.

Olsson, A., Sandberg, G. & Dahlblom, O. (2003). On Latin Hypercube Sampling for Structural Reliability Analysis. *Structural Safety*, **25**, 47-68.

Paulino, C. D., Turkman, M. A. & Murteira, B. (2003). *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Pedrosa, A. C. & Gama, S. M. (2003). *Introdução computacional à Probabilidade e Estatística*. Porto Editora, Porto.

Pipa, M. (1995). *Ductilidade de elementos de betão armado sujeitos a acções cíclicas. Influência das características mecânicas das armaduras*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

prEN 10138-1 (2009). *Prestressing steels – Part 1: General requirements..* Comité Européen de Normalization (CEN), Brussels.

Raiffa, H. & Schlaifer, R. (2000). *Applied Statistical Decision Theory*. John Wiley & Sons. Wiley Classics Library.

REBA (1967). *Regulamento de estruturas de betão armado*. Decreto n.º 47723 de 20 de Maio de 1967, rectificado pelo Decreto n.º 47842 de 11 de Agosto de 1967. Imprensa Nacional de Lisboa.

Rodrigues, J. (2005). *Identificação Modal Estocástica. Métodos de Análise e*

- Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil*. Tese de doutoramento. Teses e programas de investigação, LNEC, Lisboa.
- RSA (1983). *Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes*. Decreto-Lei n.º 235/83 de 31 de Maio. Imprensa Nacional – Casa da Moeda, Lisboa.
- RSEP (1961). *Regulamento de solicitações em edifícios e pontes*. Decreto n.º 44041 de 18 de Novembro de 1961. Imprensa Nacional de Lisboa.
- Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley, New York.
- Ryall, M. J. (2001). *Bridge Management*. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- SAMARIS (2006a). Deliverable D19: *State of the Art Report on Assessment of Structures in Selected EEA and CE Countries*. Sustainable and Advanced Materials for Road Infrastructure — V Framework programme, <http://samaris.zag.si/>.
- SAMARIS (2006b). Deliverable D30: *Guidance for the Optimal Assessment of Highway Structures*. Sustainable and Advanced Materials for Road Infrastructure — V Framework programme, <http://samaris.zag.si/>.
- SAMCO (2006). *F08a — Guideline for the Assessment of Existing Structures*. http://www.samco.org/network/download_area/ass_guide.pdf.
- Santiago, J. R. Basagoiti, L. O., Macías, J. C. & Arenas, J. M. (2000). *La corrosión de las armaduras y la vida residual de las estructuras de hormigón*. In: Inspeção e reparação de estruturas de betão armado com corrosão, Seminário LNEC, Lisboa.
- Santos, L. O. (2002). *Observação e Análise do Comportamento Diferido de Pontes de Betão*. Tese de doutoramento. Teses e programas de investigação, LNEC, Lisboa.
- Sarveswaran, V. & Roberts, M. (1999). Reliability analysis of deteriorating structures — the experience and needs of practising engineers. *Structural Safety*, **21**, 357-372.
- Savage, L. J. (1972). *The Foundations of Statistics*. Dover Publications, Inc, New York. Revised and enlarged version of the work originally published by Wiley & Sons in 1954.

Schneider, J. (2006). *Introduction to Safety and Reliability of Structures*. IABSE, Document 5, 2nd edn.

SUSTAINABLE BRIDGES (2007a). *Guideline for Inspection and Condition Assessment of Existing European Railway Bridges*. Research Project “Sustainable Bridges - Assessment for Future Traffic Demands and Longer Lives”, European Commission, 6th Framework Programme. <http://www.sustainablebridges.net>.

SUSTAINABLE BRIDGES (2007b). *Guideline for Load and Resistance Assessment of Existing European Railway Bridges*. Research Project “Sustainable Bridges - Assessment for Future Traffic Demands and Longer Lives”, European Commission, 6th Framework Programme. <http://www.sustainablebridges.net>.

SUSTAINABLE BRIDGES (2007c). *Monitoring Guidelines for Railway Bridges*. Research Project “Sustainable Bridges - Assessment for Future Traffic Demands and Longer Lives”, European Commission, 6th Framework Programme. <http://www.sustainablebridges.net>.

SUSTAINABLE BRIDGES (2007d). *Repair and Strengthening of Railway Bridges — Guideline*. Research Project “Sustainable Bridges - Assessment for Future Traffic Demands and Longer Lives”, European Commission, 6th Framework Programme. <http://www.sustainablebridges.net>.

Teixeira, A. P. (2007). *Dimensionamento de Estruturas Navais Baseado no Risco e na Fiabilidade*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

Thoft-Christensen, P. & Baker, M. J. (1982). *Structural Reliability Theory and Its Applications*. Springer-Verlag, Berlin.

Thoft-Christensen, P. (2006). *The future of life-cycle cost bridge management*. Actas das JPEE’2006 – Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas. Baptista, A.M., Silveira, P. (eds). Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

Val, D. & Stewart, M. G. (2002). Safety factors for assessment of existing structures. *Journal of Structural Engineering*, **128**, 258-265.

Vejdirektoratet (2004). Report 291: *Reliability-Based Classification of the Load Carrying Capacity of Existing Bridges*. Road Directorate, Ministry of Transport, Denmark.

Vrouwenvelder, T. (2008). Treatment of risk and reliability in the Eurocodes.

Proceedings of the Institution of Civil Engineers, **161**, 209-214.

Vrouwenvelder, T. (2010). Assessment criteria for existing structures. *Structural Engineering International*, **17**, 62-65.

Wisniewski, D. (2007). *Safety Formats for the Assessment of Concrete Bridges*, Ph.D. Thesis. Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Azurém, Guimarães.

Zwicky, D. (2004). *Plastic Assessment of slab-and-beam bridges*. IABSE reports. **88**, 90-91.

Anexo A — Modelos probabilísticos

Este Anexo contém os modelos probabilísticos usados nesta dissertação, incluindo a notação e a parametrização empregue.

Normal	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f_X(x \mid \mu, \sigma^2) = N(x \mid \mu, \sigma^2)$
Definição/FDP:	$f_X(x \mid \mu, \sigma^2) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$	$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}$
	$-\infty < x < \infty \quad -\infty < \mu < \infty$	$\sigma^2 > 0$
Momentos:	$E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2$	
t-Student reduzida	$T \sim St(\nu)$	$f_T(t \mid \nu) = St(t \mid \nu)$
Definição/FDP:	$f_T(t \mid \nu) = c \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$	$c = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}$
	$-\infty < t < \infty \quad \nu > 0$	
Momentos:	$E(T) = 0 \quad Var(T) = \nu / (\nu - 2)$	
t-Student expandida	$X \sim St(a, b, \nu)$	$f_X(x \mid a, b, \nu) = St(x \mid a, b, \nu)$
Definição/FDP:	$T \sim St(\nu) \Leftrightarrow (X = a + bT) \sim St(a, b, \nu)$	
	$f_X(x \mid a, b, \nu) = \frac{c}{b} \left(1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2}$	$c = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)}$
	$-\infty < x < \infty \quad -\infty < a < \infty$	$b > 0 \quad \nu > 0$
Momentos:	$E(X) = a \quad Var(X) = b^2\nu / (\nu - 2)$	
Gama	$X \sim Ga(\alpha, \beta)$	$f_X(x \mid \alpha, \beta) = Ga(x \mid \alpha, \beta)$
Definição/FDP:	$f_X(x \mid \alpha, \beta) = c \cdot x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$	$c = \beta^\alpha / \Gamma(\alpha)$
	$x > 0 \quad \alpha > 0$	$\beta > 0$
Momentos:	$E(X) = \alpha / \beta \quad Var(X) = \alpha / \beta^2$	

Gama invertida	$Y \sim GI(\alpha, \beta)$	$f_Y(y \alpha, \beta) = GI(y \alpha, \beta)$
Definição/FDP:	$X \sim Ga(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (Y = 1 / X) \sim GI(\alpha, \beta)$	
	$f_Y(y \alpha, \beta) = \frac{c}{y^{\alpha+1}} e^{-\beta/y}$	$c = \beta^\alpha / \Gamma(\alpha)$
	$y > 0 \quad \alpha > 0$	$\beta > 0$
Momentos:	$E(Y) = \frac{\beta}{\alpha - 1} \quad Var(Y) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$	
Uniforme	$X \sim Unif(a, b)$	$f_X(x a, b) = Unif(x a, b)$
Definição/FDP:	$f_X(x a, b) = 1 / (b - a)$	
	$a < x < b$	
FDC:	$F_X(x a, b) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x - a) / (b - a) & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$	
Momentos:	$E(X) = \frac{a + b}{2} \quad Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$	
Lognormal	$Y \sim LN(\mu_X, \sigma_X)$	$f_Y(y \mu_X, \sigma_X) = LN(y \mu_X, \sigma_X)$
Definição/FDP:	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \Leftrightarrow (Y = e^X) \sim LN(\mu_X, \sigma_X)$	
	$f_Y(y \mu_X, \sigma_X) = \frac{c}{y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]$	$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}$
	$y > 0 \quad -\infty < \mu_X < \infty$	$\sigma_X > 0$
Momentos:	$E(Y) = e^{\mu_X + \sigma_X^2/2}$	$Var(Y) = (e^{\sigma_X^2} - 1) e^{2\mu_X + \sigma_X^2}$
Beta	$X \sim Beta(\alpha, \beta)$	$f_X(x \alpha, \beta) = Beta(x \alpha, \beta)$
Definição/FDP:	$f_X(x \alpha, \beta) = c \cdot x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1}$	$c = 1 / B(\alpha, \beta)$
	$0 < x < 1 \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0$	$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} dx$
Momentos:	$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$	

Gumbel	$X \sim Gumb(u, \alpha)$	$f_X(x u, \alpha) = Gumb(x u, \alpha)$
Definição/FDP:	$f_X(x u, \alpha) = \alpha \exp(-\alpha(x - u) - e^{-\alpha(x - u)})$	
	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < u < \infty \quad \alpha > 0$
FDC:	$F_X(x u, \alpha) = \exp(-e^{-\alpha(x - u)})$	
Inversa:	$F_X^{-1}(p) = u - (1 / \alpha) \ln(-\ln p)$	
Momentos:	$E(X) = u + \frac{\gamma}{\alpha}$	$Var(X) = \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha} \right)^2 \quad \gamma = 0.75522...$

Anexo B — Métodos de extrapolação

Este anexo descreve três métodos de extrapolação a usar quando se pretende determinar a distribuição de máximos de pesos de veículos a partir da distribuição inicial.

Extrapolação usando a distribuição de extremos exacta

Considere-se a variável $Q = \{\text{Pesos dos veículos que chegam a uma determinada ponte}\}$ e admita-se conhecida a distribuição de Q , designada distribuição inicial e que denotaremos por $F_Q(q)$. Seja agora a variável $Q_{\max,\tau} = \{\text{máximo de } Q \text{ no período } \tau\}$. O objectivo é determinar a distribuição de $Q_{\max,\tau}$, designada distribuição de máximos (ou distribuição de extremos) e denotada por $F_{Q_{\max,\tau}}(q)$. Admitindo que no período τ se observam N veículos, com pesos Q_1, \dots, Q_N , tem-se:

$$F_{Q_{\max,\tau}}(q) = P(Q_{\max,\tau} < q) = P(Q_1 < q \cap \dots \cap Q_N < q) = \left(F_Q(q)\right)^N. \quad (1)$$

Esta distribuição é frequentemente designada distribuição de extremos exacta (Ang & Tang, 2007), em oposição às distribuições de extremos assintóticas que se obtêm para N grande. Como em geral o número de veículos que atravessam a ponte durante o período τ é variável, é lógico adoptar para N o número médio de veículos

Derivando (1) obtém-se a FDP de máximos:

$$f_{Q_{\max,\tau}}(q) = \frac{d}{dq} \left(F_Q(q)\right)^N = N \cdot f_Q(q) \cdot \left(F_Q(q)\right)^{N-1}. \quad (2)$$

Determine-se o valor de Q correspondente a um determinado período de retorno, \bar{T} . Esse valor, que denotaremos por Q_k , é dado pela inversa de $F_{Q_{\max,\tau}}(q)$ avaliada em $p = 1 - 1 / \bar{T}$, conforme se viu no capítulo 3. Invertendo então a Eq. (1), vem:

$$p = \left(F_Q(q)\right)^N \Leftrightarrow p^{(1/N)} = F_Q(q) \Leftrightarrow q = F_Q^{-1}(p^{(1/N)}). \quad (3)$$

Assim, a inversa de $F_{Q_{\max,\tau}}(q)$ é dada por:

$$F_{Q_{\max,\tau}}^{-1}(p) = F_Q^{-1}(p^{(1/N)}). \quad (4)$$

e o valor Q_k , por:

$$Q_k = F_{Q_{\max, \tau}}^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right) = F_Q^{-1} \left(\left(1 - \frac{1}{T} \right)^{(1/N)} \right). \quad (5)$$

Observe-se que se se desejar gerar uma amostra de máximos de Q empregando o método da transformação inversa, a Eq. (4) mostra que o algoritmo a empregar consistem em:

- 1) gerar $u \sim Unif(0,1)$;
- 2) obter $Q_{\max} = F_Q^{-1}(u^{(1/N)})$;

A título de exemplo, considere-se uma ponte sobre a qual passam em média 495 camiões por dia com peso dado pela distribuição $Q \sim N(34.8, 4.6)$ [tf]. Na figura seguinte mostra-se o gráfico desta distribuição (distribuição inicial) e o gráfico da distribuição de máximos em períodos de 50 anos ($N = 495 \times 365 \times 50$), dado pela Eq. (2).

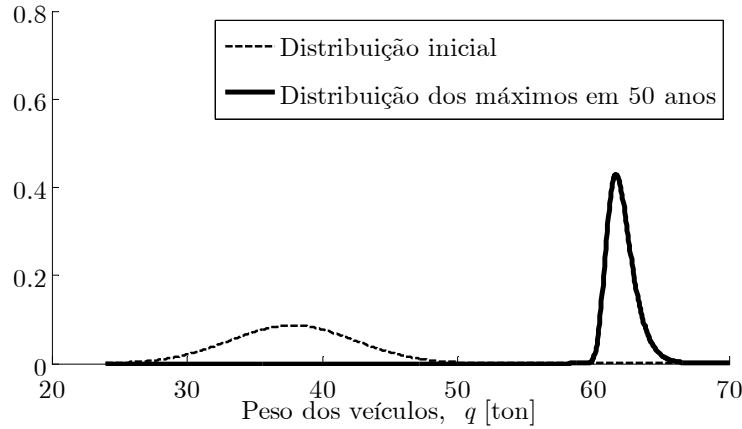


Figura 1: Distribuição inicial e distribuição de máximos.

Recorrendo à Eq. (5) o valor de Q com um período de retorno de 1000 anos é de 64.08 tf. O valor de Q com um período de retornos de 50 anos é de 61.63 tf. Note-se que passar de um período de 50 para 1000 anos resulta num aumento de apenas 4%. A Figura seguinte mostra o gráfico de Q_k em função do período de retorno:

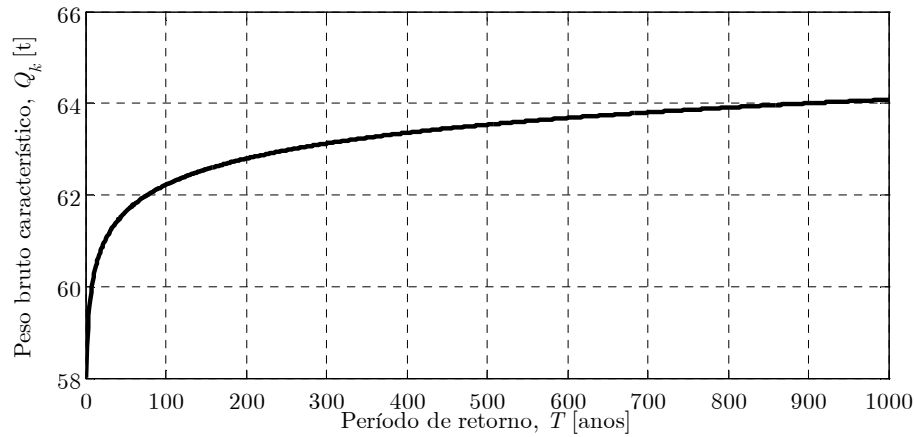


Figura 2: Peso bruto dos camiões em função do período de retorno.

Tem interesse observar como varia o coeficiente de variação da distribuição de máximos com o período de referência. O coeficiente de variação da distribuição inicial é $V = 4.6 / 37.8 = 0.12$. Usando a distribuição de máximos dada por (1) e recorrendo ao método de MC, obtiveram-se os seguintes resultados: para a distribuição de máximos diários ($N \approx 500$ camiões) obteve-se $V = 0.033$; para os máximos anuais ($N = 500 \times 365$) obteve-se $V = 0.021$ e para os máximos em 50 anos obteve-se $V = 0.017$. Observa-se assim um decrescimento do coeficiente de variação com o período de referência. Note-se que o coeficiente de variação dos máximos, mesmo para um período de referência de um só dia, é muito mais baixo que o coeficiente de variação da distribuição de todos os camiões observados (distribuição inicial).

Extrapolação considerando chegadas de veículos segundo um processo de Poisson

Admita-se que os camiões chegam a uma ponte segundo um processo de Poisson com taxa de chegada ν . Para tráfego fluído, este é um modelo razoável (Benjamim & Cornell, 1970). Assim, o número de veículos que chegam à ponte no período τ é uma variável aleatória com função de probabilidade dada por $p(x) = P(X = x) = e^{-\nu\tau} (\nu\tau)^x / x!$. Em particular a probabilidade de no período τ não chegar nenhum veículo é igual a:

$$p(0) = e^{-\nu\tau}. \quad (6)$$

Admita-se agora que o peso Q dos veículos é uma variável aleatória com distribuição $F_Q(q)$. Obtém-se assim um processo estocástico, $Q(t)$. A Figura seguinte mostra uma realização particular deste processo:

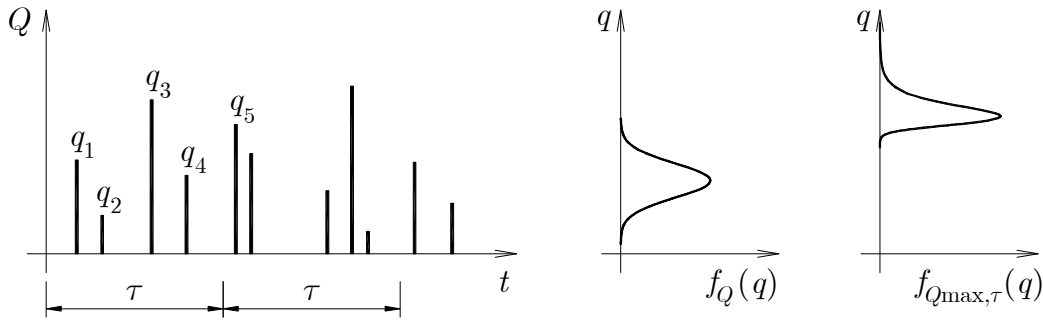


Figura 3: Realização particular do processo $Q(t)$ — peso dos veículos que chegam a uma determinada ponte.

Um processo com estas características é conhecido como *thinned Poisson process* (Vejdirektoraret, 2004; Madsen *et al.*, 1986). Pretende-se determinar a distribuição da variável $Q_{\max,\tau}$, que representa o peso máximo observado em τ .

Começa-se por notar que $1 - F_Q(q)$ representa a probabilidade de um veículo qualquer que chegue à ponte possuir peso superior a q . Portanto, $\nu(1 - F_Q(q))$ representa a taxa de chegada (n.º de veículos por unidade de tempo) de veículos com peso superior a q . Ora, $F_{Q_{\max,\tau}}(q) = P(Q_{\max,\tau} < q)$ representa a probabilidade de, durante τ , não chegar nenhum veículo com peso superior a q , sendo por conseguinte dado por (6), onde ν deverá ser substituído por $\nu(1 - F_Q(q))$, ou seja:

$$F_{Q_{\max,\tau}}(q) = e^{-\nu(1-F_Q(q))\tau}. \quad (7)$$

Este é o modelo recomendado no documento-guia dinamarquês (Vejdirektoraret, 2004) para a obtenção de efeitos máximos devido à sobrecarga rodoviária em condições de tráfego fluído. Resolvendo (7) em ordem a q , tem-se:

$$\begin{aligned} p = e^{-\nu(1-F_Q(q))\tau} &\Leftrightarrow \ln p = -\nu(1 - F_Q(q))\tau \Leftrightarrow \ln p = -\nu\tau + \nu\tau F_Q(q) \\ &\Leftrightarrow F_Q(q) = 1 + \frac{\ln p}{\nu\tau} \Leftrightarrow q = F_Q^{-1}\left(1 + \frac{\ln p}{\nu\tau}\right), \end{aligned}$$

ou, escrito de outra forma,

$$F_{Q_{\max,\tau}}^{-1}(p) = F_Q^{-1}\left(1 + \frac{\ln p}{\nu\tau}\right). \quad (8)$$

Assim, o valor característico de Q expresso em função do período de retorno \bar{T} , é dado por:

$$Q_k = F_Q^{-1}\left(1 + \frac{1}{\nu\tau} \ln\left(1 - \frac{1}{\bar{T}}\right)\right). \quad (9)$$

Considerando o exemplo da secção anterior, onde, recorde-se, chegam a uma ponte em média $\nu = 495$ camiões por dia, com peso $Q \sim N(37.8, 4.6)$ [tf], o valor de Q com um período de retorno de 1000 anos, dado por (9), é igual a 64.08 tf. Este valor coincide exactamente com o valor obtido usando a distribuições de extremos exacta. Mesmo para períodos de retorno muito baixos (2 dias, por exemplo), os valores dados por ambas as expressões são praticamente iguais, pelo que as expressões (5) e (9) poderão ser consideradas equivalentes.

Extrapolação usando a distribuição Gumbel

Quando a distribuição inicial de Q possui decaimento exponencial junto à cauda superior, então, para N grande, a distribuição $F_{Q_{\max, \tau}}(q) = [F_Q(q)]^N$ tende assintoticamente para a distribuição de Gumbel (Benjamim & Cornell, 1970). A distribuição normal é um exemplo de distribuição cuja cauda superior cai de forma exponencial. Designando por μ e σ os parâmetros da distribuição inicial $F_Q(q)$, os parâmetros da distribuição Gumbel que se aproxima do modelo $F_{Q_{\max, \tau}}(q) = [F_Q(q)]^N$, são dados por (Ang & Tang, 2007):

$$u_N = \mu + \sigma \left(\sqrt{2 \ln N} - \frac{\ln(\ln N) + \ln(4\pi)}{2\sqrt{2 \ln N}} \right). \quad (10)$$

$$\alpha_N = \frac{\sqrt{2 \ln N}}{\sigma}. \quad (11)$$

Uma vez determinados os parâmetros u_N e α_N , fica definida a distribuição a distribuição Gumbel e consequentemente a distribuição dos máximos de Q no período τ , dada por:

$$F_{Q_{\max, \tau}}(q) = \exp\left(-\exp\left(-\alpha_N(q - u_N)\right)\right). \quad (12)$$

A partir desta, facilmente se obtém o valor de Q a que corresponde um determinado período de retorno:

$$Q_k = u_N - (1 / \alpha_N) \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{\bar{T}} \right) \right). \quad (13)$$

Chama-se a atenção da necessidade de ter presente que \bar{T} deve ser expresso nas unidades de tempo a que se refere os parâmetros μ_N e α_N . Por exemplo, se N representar o número de veículos observados por dia, então os parâmetros μ_N e α_N referem-se aos máximos diários, pelo que o período de retorno \bar{T} deve ser expresso em dias.

Considerando o exemplo que se tem vindo a considerar, obteve-se $u_N = 51.16 \text{ tf}$, $\alpha_N = 0.766 \text{ tf}^{-1}$ e $Q_k = 67.88 \text{ tf}$ (correspondente a um período de retorno de 1000 anos).

Anexo C — Listagens de rotinas

Este anexo apresenta algumas listagens de rotinas MATLAB desenvolvidas no âmbito do caso de estudo.

Rotina mcarlo.m

```
% Script file: mcarlo.m
%
% Objectivo: Determinação da probabilidade pf = P(Ms > Mr) - probabilidade
% de formação de rótula plásticas na secção de 1/2 vão do tramo central
% da ponte objecto de estudo. Método de MC.
%
% Unidades:
% [L] = m; [F] = kN;
%
clear; clc; clf;
nsamp = 5000000;
%
% Características da secção
b = 1.10; h = 1.25;
bw = 0.50; hf = 0.20;
As1 = 6*4.91e-4; As2 = 5*4.91e-4;
%
% Parâmetros das distribuições lognormais que modelam as incertezas nos
% modelos de transformação
[a_qs b_qs] = lognpar(1.0, .05);
[a_qr b_qr] = lognpar(1.0, .05);
%
%
% Variáveis básicas
%
Mpp = normrnd( 608.2, 30.4, nsamp, 1);
Mrcp = normrnd( 108.4, 10.8, nsamp, 1);
Q = gumbrnd( 38, .56, nsamp);
% Resistência do betão
n = 9;
t = trnd(n-1, nsamp, 1);
x = 10.81 + 0.276*t;
fc = exp(x);
% fc sem incerteza estatística
fc = lognrnd(10.81, 0.25, nsamp, 1);
%
fsy = normrnd( 460e3, 30e3, nsamp, 1);
%
% Índice de corrosão
% modelo preditivo a priori
ic = betarnd(1.75,1.75, nsamp, 1);
% Modelo preditivo a posteriori
ic = betarnd(2.89,1.05, nsamp, 1);
```

```

%
c1 = unifrnd( .04, .06, nsamp, 1);
c2 = unifrnd( .09, .13, nsamp, 1);
qs = lognrnd( a_qs, b_qs, nsamp, 1);
qr = lognrnd( a_qr, b_qr, nsamp, 1);
%
% Transformações
Mq = 10.13*Q;
Ms = qs.*(Mpp + Mrcp + Mq);
%
As = As1*ic + As2;
d = h - (As1*ic.*c1 + As2.*c2)./As;
Fs = fsy.*As;
y = Fs./(fc*b);
Mr = Fs.*(d - y/2);
Mr = qr.*Mr;
x = y/.8;
ec = 0.0035;
es = (d - x)./x*ec;
if sum(es < 0.002) >= 1
    display('Aviso: o aço pode não estar em cedência!')
end
num_casos_y_excede_hf = sum(y > hf)
ymax = max(y)
%
Z = Mr - Ms;
I = (Z < 0);
pf = sum(I)/nsamp
beta = -norminv(pf)
%
% Histogramas dos momentos actuante e resistente
hist(Ms,20)
hold on
hist(Mr,40)
set(findobj('Type','patch'),'Facecolor','none','Edgecolor','black')
set(gca,'FontSize',18,'Fontname','euclid')
xlabel('Momentos actuante e resistente [KNm]')

```

Rotina form.m

```

% Script file form.m
%
% Objectivo: Determinação da probabilidade  $pf = P(Ms > Mr)$  - probabilidade
% de formação de rótula plásticas na secção de 1/2 vão do tramo central
% da ponte objecto de estudo. Método de FORM
%
% Unidades:
% [L] = m; [F] = kN
%
clear; clc; clf;
%
u0 = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
[u beta] = fmincon(@funobj,u0,[],[],[],[],[],[],[],@sbjto);
beta
alfa = u./beta
soma = sum(alfa.^2)
%
% Gráfico circular com os quadrados dos coef. de sensibilidade
pie(alfa.^2)
legend('Mpp','Mrcp','Q','fc','fs0.2','ic','c1','c2','\thetas','\thetar')

```

```

%
function d = funobj(u)
d = sqrt(sum(u.^2));
%
function [c ceq] = sbjto(u)
%
% Características da secção e armaduras
b    = 1.10; h    = 1.25;
bw   = 0.50; hf   = 0.20;
As1  = 6*4.91e-4; As2 = 5*4.91e-4;
%
[a_qs b_qs] = lognpar(1.0, .05);
[a_qr b_qr] = lognpar(1.0, .05);
%
% Variáveis básicas
Mpp  = norminv(normcdf( u(1)), 608.2, 30.4);
Mrcp = norminv(normcdf( u(2)), 108.4, 10.8);
Q    = gumbinv(normcdf( u(3)), 38, .56);
fc   = logninv(normcdf( u(4)), 10.81, .25);
fsy  = norminv(normcdf( u(5)), 460e3, 30e3);
ic   = betainv(normcdf( u(6)), 1.75, 1.75);
c1   = unifinv(normcdf( u(7)), .04, .06);
c2   = unifinv(normcdf( u(8)), .09, .13);
qs   = logninv(normcdf( u(9)), a_qs, b_qs);
qr   = logninv(normcdf( u(10)), a_qr, b_qr);
%
% Transformações
Mq = 10.13*Q;
Ms = qs.*(Mpp + Mrcp + Mq);
%
As = As1*ic + As2;
d = h - (As1*ic.*c1 + As2.*c2)./As;
Fs = fsy.*As;
y = Fs./(fc*b);
Mr = Fs.*(d - y/2);
Mr = qr.*Mr;
%
ceq = Mr - Ms;
c = [];

```

Rotina post_predictive.m

```

% Script file: post_predictive.m
%
% Objectivo: Determinação de uma amostra do modelo preditivo a posteriori
% do índice de corrosão.
%
clear; clc; clf;
tic
%
% Amostra disponível de índices de corrosão
x = [0.46 0.52 .99 .99];
n = length(x);
%
% Dimensão da amostra a simular
nsamp = 250000;
%
% Função verossimilhança a menos de uma constante
L = @(a,b) (1./beta(a,b)).^n .* (prod(x)).^(a-1) .* (prod(1-x)).^(b-1);
%

```

```
% Determinação do máximo da função verossimilhança
a = unifrnd(1,8, 500000, 1);
b = unifrnd(1,8, 500000, 1);
likelihood = L(a,b);
Lmax = max(likelihood);
%
% Geração da amostra a posteriori com o método da aceitação-rejeição
a = zeros(nsamp,1);
b = zeros(nsamp,1);
i = 1;
while i <= nsamp
    a(i) = unifrnd(1,8);
    b(i) = unifrnd(1,8);
    u = unifrnd(0,1);
    if u <= 1/Lmax*L(a(i),b(i))
        i = i + 1
    end
end
%
% Amostra preditiva do índice de corrosão
x = betarnd(a,b);
toc
%
save x
```